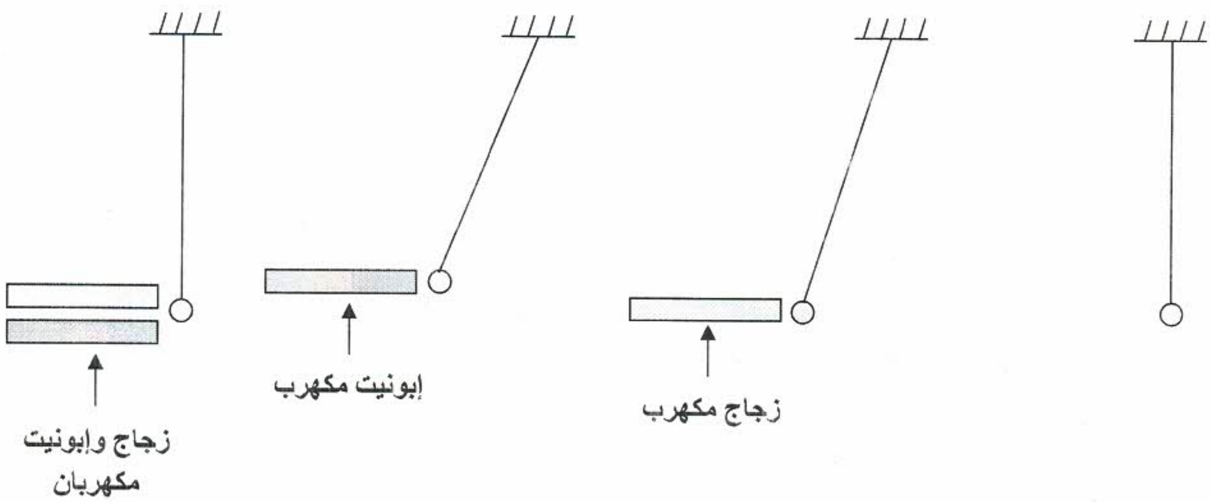
الفصل الثاني: الشحنة الكهربائية - الحقل والكمون الكهروساكنان

1- التكهرب (L'électrisation):

نعتبر التجربة البسيطة التالية: أمشط شعرك في يوم جاف ثم بعد ذلك قرب المشط من قصاصات ورقية صغيرة، سوف تلاحظ أنها تنجذب بسرعة نحو المشط. نحصل على نفس الظاهرة عندما ندلك قضيبا من الزجاج بقطعة من الحرير أو قضيب من الإبونيت (ébonite) بقطعة من الفرو. نستنتج إذن أن بعض المواد تمتلك بعد دلكها خاصية أطلق عليها اسم "**الكهرباء**" نسبة إلى الكهرمان المشتق من الكلمة اليونانية "Elektron". نقول أن المادة التي كسبت هذه الخاصية بعد دلكها قد صارت "**مكهربة**". هذه الخاصية تولد داخل المادة فعلا آخر يسمى التأثير "**الكهرومغناطيسي**" وهو يملك فروقا أساسية بينه وبين **الفعل الثقلي** أو "**تأثيرالجاذبية**". لكي نتعرف على بعض هذه الفروق، نجري التجارب البسيطة التالية:

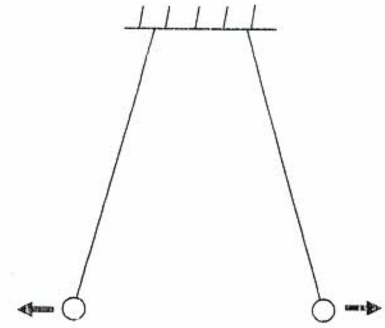
التجربة 1: نأخذ كرة صغيرة من مادة البوليستران " polystyrène" ونعلقها بخيط طويل.



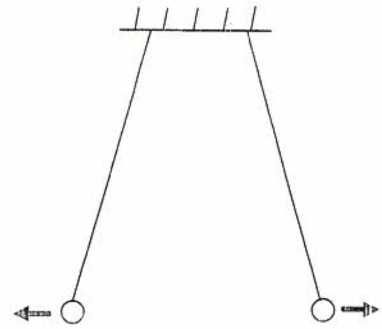
نلاحظ أنه عندما نقرب قضيب من الزجاج أو من الإبونيت مكهرب (تم دلك الأول بالحرير والثاني بالفرو) من الكرة فإنها تنجذب نحوه. ولكن عندما نقرب القضيبان المكهربان معا، فإنهما يولدان تأثيرا ضعيفا جدا أو قد يكون معدوما ولذلك تبقى الكرة في مكانها.

التجربة 2: نأخذ الآن كرتين من البوليستيران معلقتين وقريبتين من بعضهما. نلاحظ ما يلي:

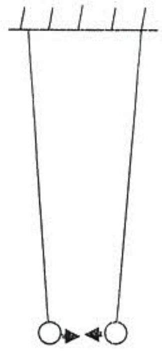
- عند لمس الكرتين بقضيب مكهرب من الزجاج، فإنهما **تتنافران**.
- عند لمس الكرتين بقضيب مكهرب من الإبونيت، فإنهما **تتنافران**.
- عند لمس كرة بالزجاج المكهرب والأخرى بالإبونيت المكهرب ، فإنهما **تتجاذبان**.



بعد لمس الكرتين
بزجاج مكهرب



بعد لمس الكرتين
بإبونيت مكهرب



بعد لمس كرة بزجاج مكهرب
والأخرى بإبونيت مكهرب

نستنتج من التجربتين ما يلي:

- **فعل "التأثير الثقلي" الذي هو دائما فعل تجاذب يختلف عن فعل "التأثير الكهربائي" الذي يمكن أن يكون فعل تجاذب أو فعل تنافر.**
- **هذا الاختلاف يرجع إلى وجود نوعين من الكهرباء، الأولى خاصة بالزجاج وتسمى موجبة والثانية خاصة بالإبونيت وتسمى سالبة.**
- **الكهرباء التي هي من نفس النوع تتنافر والتي هي من نوعين مختلفين تتجاذب.**

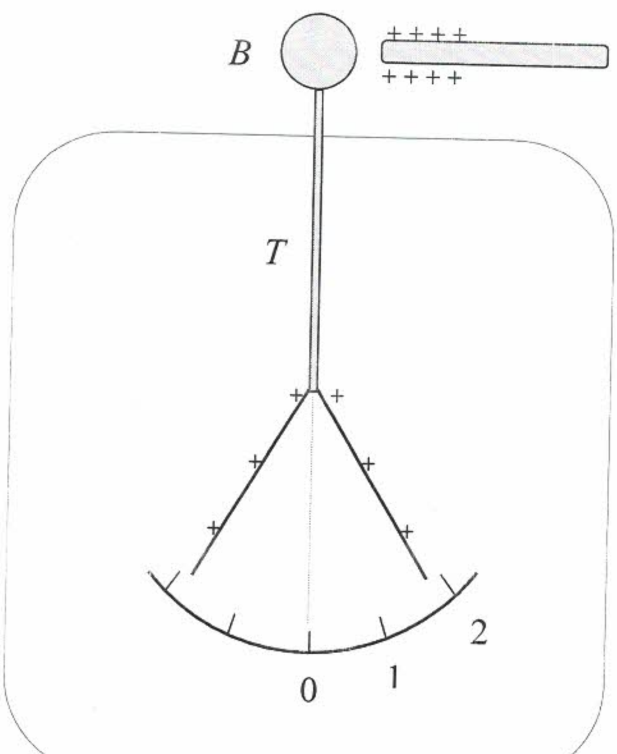
- **الكهرباء الموجبة والسالبة "يعدمان" بعضهما البعض وهذا عكس الكتلة التي هي نوع واحد.**

ملاحظة: نسبة الكهرباء الموجبة إلى الزجاج والسالبة إلى الإبونيت ليست دقيقة وهي في الحقيقة تعني أن عملية دلك الزجاج تجعله يأخذ كهرباء موجبة والإبونيت يأخذ كهرباء سالبة.

2- الشحنة الكهربائية (La charge électrique):

بنفس الطريقة التي وصفنا بها قوى التأثير الثقلي (قانون نيوتن للجاذبية) حيث أرفقنا كل جسم بكتلة m (مقياس الفيزياء 1: مكانيك النقطة المادية)، نصطلح أيضا أن لكل جسم مكهرب **"كتلة كهربائية"** نعتبرها مصدر التأثير الكهربائي ولتفادي أي التباس بين التأثيرين وبطريقة أفضل، تم استعمال اسم **"الشحنة الكهربائية"** لوصف الظاهرة الكهربائية والتي نرمز لها عادة بالرمز Q أو q. في النظام .S.I وحدة الشحنة الكهربائية هي الكولون (Le Coulomb) ونرمز له ب **C**.

يمكن اكتشاف الشحنة الكهربائية وقياسها باستعمال جهاز إلكتروسكوب (إلكترومتر) بسيط يتكون من كرة معدنية B موصولة بسلك معدني T. السلك موصول في طرفه الأخر بصفيحتين رقيقتين من الذهب أو الألمونيوم (Al) قريبتين جدا من بعضهما (أنظر الشكل). يعزل الجهاز كهربائيا عن الوسط الخارجي بصندوق من الزجاج. بمجرد اقتراب جسم مكهرب من الكرة B، الصفيحتان تبتعدان عن بعضهما. الابتعاد متناسب مع الشحنة التي يحملها الجسم المكهرب. دقة قياس الشحنة من طرف الجهاز ليست عالية بسبب أن التأثير الكهربائي بين الجسم المشحون والكرة B ليس كليا كما سنرى ذلك في الفصل التالي ولكن الجهاز يسمح بتحسس التكهرب الضعيف جدا.

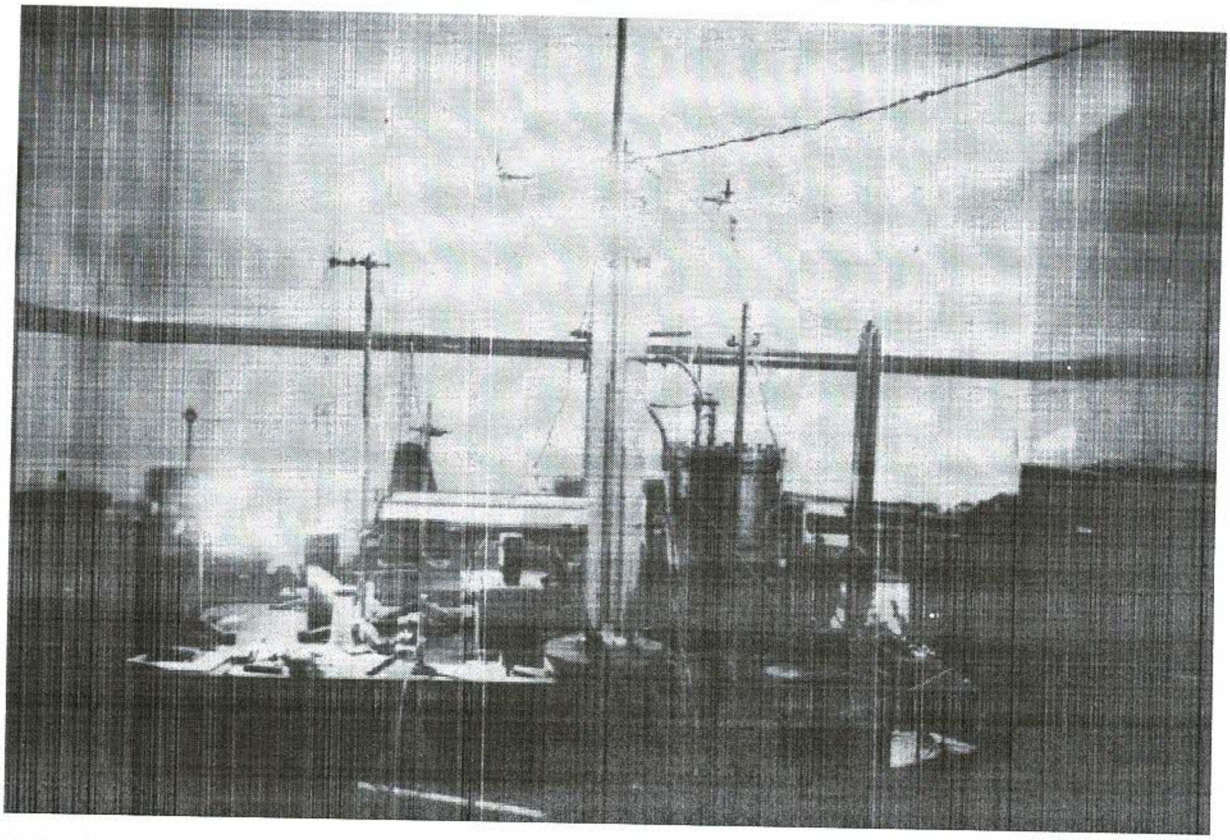


3- الشحنة الكهربائية مكممة (Quantification de la charge électrique):

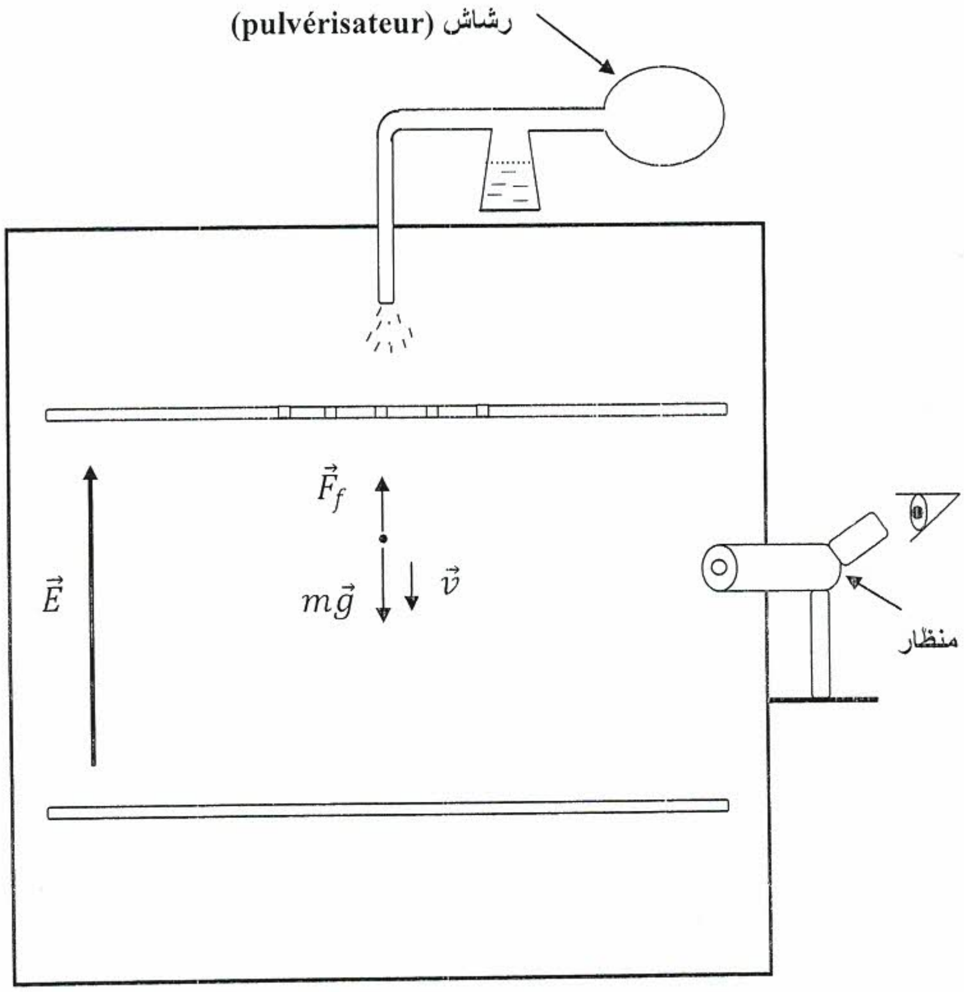
قيمة الشحنة الكهربائية ليست عشوائية، فهي محددة تماما بالنسبة لشحنة أساسية أي مكممة.

لتوضيح ذلك، نستعرض تجربة الفيزيائي الأمريكي **ميليكان** « Millikan » التي نشر نتائجها الأولى في 1913 والمعروفة بتجربة قطرة الزيت.

الجهاز الذي استعمله ميليكان في تجربة قطرة الزيت



نموذج مبسط لجهاز ميليكان يوجد في الشكل التالي. استعمل ميليكان صفيحتين متوازيتين (يشكلان معا مكثفة كهربائية) بينهما حقل كهربائي $\vec{E}$ يمكن أن يكون ثابتا أو متناوبا. يمكن تغيير شدة واتجاه الحقل بتغيير فرق الجهد ΔV بين الصفيحتين. الصفيحة العليا تحتوي ثقوبا صغيرة وفوقها رشاش للزيت. الثقوب تسمح بمرور قطرات الزيت إلى الفضاء الذي يقع بين الصفيحتين. تتعرض هذه القطرات أثناء سقوطها، زيادة على قوة الثقل $m\vec{g}$ ، إلى قوة احتكاك $\vec{F}_f$ حيث: $\vec{F}_f = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$ مع η معامل لزوجة الزيت في الهواء، r نصف قطر قطرة الزيت التي نعتبرها كروية الشكل و $\vec{v}$ سرعة قطرة الزيت.



عندما يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ مقطوعا، فإن معادلة الحركة لقطرة الزيت تكتب:

$$m\,\vec{\gamma} = m\,\vec{g} - 6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$$

أو بالإسقاط على المحور $\overrightarrow{Oz}$ الشاقولي: $m\,\gamma = m\,g - 6\,\pi\,\eta\,r\,v$

تصل قطرة الزيت إلى سرعتها الحدية v_l لما $\gamma = 0$ أي:

$$v_l = v_1 = \frac{m\,g}{6\,\pi\,\eta\,r} = \frac{2\,\rho\,r^2\,g}{9\,\eta}$$

حيث ρ هي الكتلة الحجمية للزيت المستعمل. عند اعتبار دافعة أرخميدس نغير الكتلة الحجمية ρ بالفرق $\rho - \rho_a$ حيث ρ_a هي الكتلة الحجمية للهواء.

نفترض أن قطرة الزيت قد كسبت شحنة كهربائية q موجبة عند خروجها من الرشاش. عندما نطبق الحقل $\vec{E}$ تصير معادلة الحركة :

$$m\,\vec{\gamma} = q\,\vec{E} - 6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v} - m\,\vec{g}$$

والسرعة الحدية الجديدة لقطرة الزيت هي: $$v_l = v_2 = \frac{q\,E - m\,g}{6\,\pi\,\eta\,r}$$

وعندما نعوض $m\,g$ من معادلة v_1 السابقة نجد: $q = 6\,\pi\,\eta\,r(v_1 + v_2)\,/\,E$

يمكن الحصول على نصف القطر r من قيمة v_1 التي نحددها بمراقبة حركة قطرة الزيت بين الصفيحتين باستعمال المنظار. عندما تكون الشحنة q سالبة فإن صعود القطرة نحو الأعلى يتم بتغيير اتجاه $\vec{E}$ نحو الأسفل. عند قطع وصل الحقل $\vec{E}$ عدة مرات، نلاحظ أن قطرة الزيت تتحرك صعودا ونزولا مع المحافظة على السرعة الحدية v_1 ، غير أن السرعة v_2 تتغير من حين لآخر نتيجة تغير شحنة القطرة q. هذا التغير يسببه التقاط القطرة للشوارد الغازية التي تتشكل في الهواء تحت تأثير الإشعاعات الكونية. يمكن تحريض عدد الشوارد في الهواء بين الصفيحتين بإضافة منبع للأشعة γ أو X قرب الجهاز من أجل مضاعفة احتمال تغيير القطرة لشحنتها q.

بالرجوع إلى المعادلة التي تربط q و v_2 نجد أن التغير Δq للشحنة و Δv_2 للسرعة مقيدين بالعلاقة : $\Delta q = 6\,\pi\,\eta\,r\,\Delta v_2\,/\,E$. التغير Δq يكون مرة موجبا وأخرى سالبا وفق طبيعة الشاردة التي التصقت بقطرة الزيت.

بإعادة تجربة قطرة الزيت عدة مرات، توصل ميليكان إلى أن التغيرات Δq هي دائما مساوية لعدد طبيعي × شحنة e أي: $\boldsymbol{\Delta q = n\,e}$.

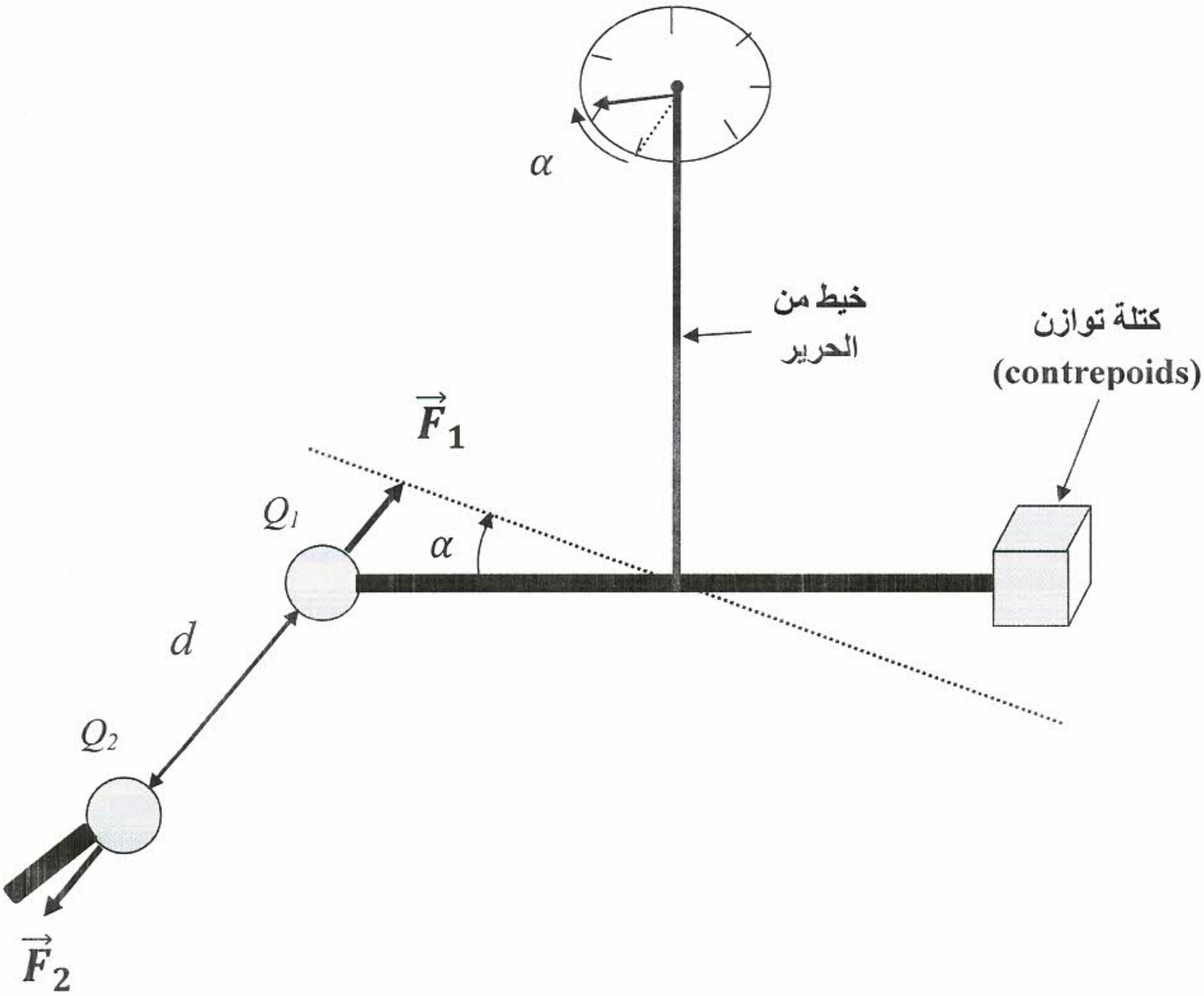
الشحنة e تسمى الشحنة الأساسية (la charge fondamentale) وهي تساوي:

$$\boldsymbol{e = 1.6021\;10^{-19}\;C}$$

"جميع الشحنات الكهربائية هي مساوية أو من مضاعفات الشحنة الأساسية"

4- قانون كولون (la loi de Coulomb):

في سنة 1785 استطاع الفيزيائي الفرنسي شارل البير كولون (C. A. Coulomb) أن يحصل عن طريق التجربة على القانون الذي يعطي مقدار القوة الموجودة بين شحنتين كهربائيتين. لقياس هذه القوة استعمل كولون ميزان فتل (balance de torsion) كما هو مبين في الشكل.



قياس زاوية فتل الخيط α يؤدي إلى تحديد قوة التنافر بين الكرتين المشحونتين. عند تغيير المسافة d بين الكرتين وقيم الشحنتين Q_1 و Q_2 لاحظ كولون ما يلي:

- **القوة الكهربائية متناسبة مع** Q_1 و Q_2 ($F_1 \propto Q_1$ و $F_1 \propto Q_2$).
- **القوة الكهربائية عكس متناسبة مع** d^2 ($F_1 \propto \frac{1}{d^2}$)

أي: $F_1 = K \frac{|Q_1 \, Q_2|}{d^2}$ حيث K هو ثابت التناسب. هذه العلاقة مشهورة باسم **قانون كولون.**

قيمة K تتعلق بنظام الوحدة المستعمل. في النظام S.I.: $K = 8{,}988 \; 10^9 \; N\,m^2 \,/\, C^2$

ونأخذ عادة: $K = 9 \cdot 10^9 \; N\,m^2 \,/\, C^2$.

لإظهار المعنى الفيزيائي للثابت K، نعطي له عادة قيمة موافقة تكتب: $K = 1/4\pi\,\varepsilon_0$

حيث ε_0 هي السماحية الكهربائية للفراغ. في النظام *S.I.*:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85418781\ldots 10^{-12}\ C^2\ / N\ m^2 \quad \text{أو} \quad \varepsilon_0 \approx 8{,}85\ 10^{-12}\ C^2\ / N\ m^2$$

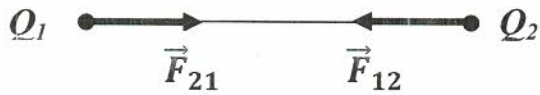
العلاقة السابقة لقانون كولون تعطي فقط شدة القوة الكهربائية بين الشحنتين Q_1 و Q_2 . شعاع القوة الكهربائية محمول بالمستقيم الرابط بين الشحنتين. القوة الكهربائية موجهة كما يلي:

- **في الاتجاه المعاكس للشحنة الأخرى لما $Q_1\,Q_2 > 0$ (Q_1 و Q_2 من نفس النوع).**

$Q_1\,Q_2 > 0 \Leftarrow$ تنافر

- **في اتجاه الشحنة الأخرى لما $Q_1\,Q_2 < 0$ (Q_1 و Q_2 مختلفتان في النوع).**

$Q_1\,Q_2 < 0 \Leftarrow$ تجاذب

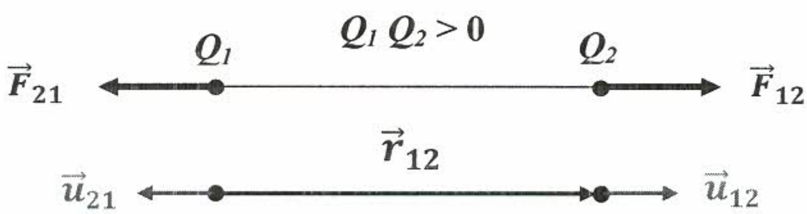


ولهذا يمكن أن نكتب قانون كولون في صيغته الشعاعية كما يلي:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}{}^3} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}_{12}}{r_{12}{}^2}$$

حيث: - $\vec{F}_{12}$ هي القوة التي تؤثر بها الشحنة Q_1 على الشحنة Q_2 . - $\vec{r}_{12}$ هو الشعاع الرابط بين Q_1 و Q_2 والموجه من Q_1 نحو Q_2 . - $\vec{u}_{12}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{r}_{12}$ أي $\vec{u}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$

- r_{12} هي المسافة بين Q_1 و Q_2 أي $r_{12} = \|\vec{r}_{12}\| = \|\vec{r}_{21}\|$.



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad ، \quad \vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \quad ، \quad r_{12} = r_{21} \quad ، \quad \vec{u}_{12} = -\vec{u}_{21}$$

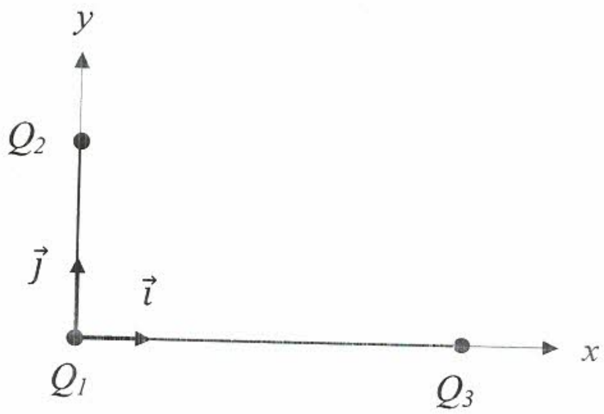
قانون التطابق (La loi de *superposition*):

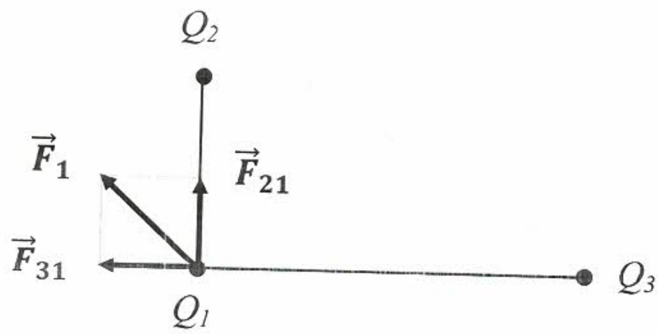
في حالة وجود مجموعة من الشحن $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n\}$ في المنطقة التي توجد فيها شحنة Q فإنها تتعرض إلى قوة تساوي محصلة القوي التي تؤثر بها كل شحنة Q_i على Q أي :

$$\vec{F}_Q = \vec{F}_{Q_1} + \vec{F}_{Q_2} + \vec{F}_{Q_3} + \cdots + \vec{F}_{Q_n}$$

عملية الجمع هنا هي التي نطلق عليها اسم **قانون التطابق** وهو يتعدى إلى عدد كبير من قوانين الفيزياء الأخرى التي تحكم المادة مثلما سنرى في هذا المقياس.

تطبيق: ما هي القوة التي تؤثر على الشحنة Q_1 الناتجة عن وجود شحنتين Q_2 و Q_3 . الشحن الثلاثة تشكل معا مثلثا قائم الزاوية في Q_1. نعطي: $Q_1=30\ \mu C$ ، $Q_2=-\ 60\ \mu C$ ، $Q_1=40\ \mu C$ ، $r_{21}=1\ m$ و $r_{31}=2\ m$.





$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_1\, Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{-\vec{j}}{{r_{21}}^2} + \frac{Q_1\, Q_3}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{-\vec{i}}{{r_{31}}^2} \qquad \|\vec{F}_1\| = \sqrt{\|\vec{F}_{21}\|^2 + \|\vec{F}_{31}\|^2}$$

5- الحقل الكهربائي (Le champ électrique):

نعتبر التوزيع المشكل من n شحنة نقطية $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n\}$ تقع على الترتيب في النقاط $\{O_1, O_2, O_3, \dots, O_n\}$. نركز على محصلة القوى التي تؤثر بها هذه الشحن على شحنة Q تقع في نقطة M مع إمكانية تغييرها بشحن أخرى. محصلة القوى المطبقة على Q هي:

$$\vec{F}_Q = \vec{F}_{Q_1} + \vec{F}_{Q_2} + \vec{F}_{Q_3} + \cdots + \vec{F}_{Q_n}$$

$$\vec{F}_Q = \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}_1}{\left\|\overrightarrow{O_1M}\right\|^2} + \frac{QQ_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}_2}{\left\|\overrightarrow{O_2M}\right\|^2} + \frac{QQ_3}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}_3}{\left\|\overrightarrow{O_3M}\right\|^2} + \cdots + \frac{QQ_n}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_n}{\left\|\overrightarrow{O_nM}\right\|^2}$$

أو: $\vec{F}_Q = Q\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}_i}{\left\|\overrightarrow{O_iM}\right\|^2}\right)$ مع $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{O_iM}}{\left\|\overrightarrow{O_iM}\right\|}$.

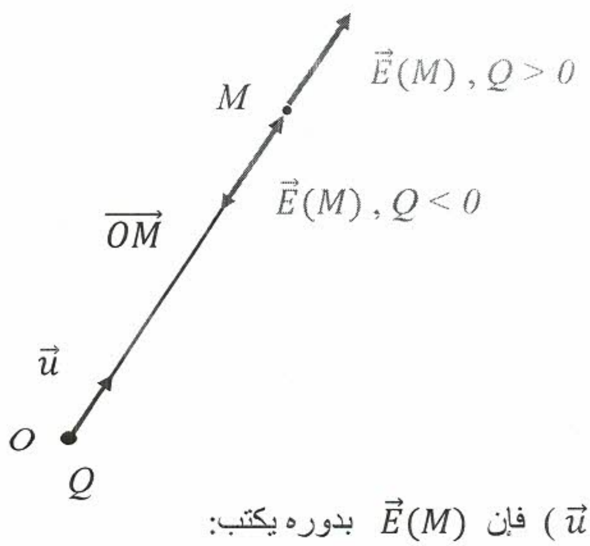
تغيير الشحنة Q بشحنة Q' لا يغير المقدار الشعاعي الموجود بين قوسين تحت الجمع في عبارة $\vec{F}_{Q'}$. هذا المقدار الناتج عن الشحن المحيطة بالنقطة M هو إذن مقدار مستقل عن الشحنة التي نضعها في M . هذا المقدار الذي نرمز له عادة بالشعاع $\vec{E}(M)$ يعرف بالحقل الكهربائي في M الناتج عن الشحن $\{Q_i\}$ الموجودة في المواقع $\{O_i\}$.

يمكن أن نحدد الحقل الكهربائي في نقطة M من الفضاء بمعرفة القوة الكهربائية التي تؤثر على شحنة Q توجد في M ونكتب: $\vec{F}_Q(M) = Q\cdot\vec{E}(M)$. هذه العلاقة هي مجرد صيغة أخرى لقانون كولون.

يمكن إذن حساب القوة الكهربائية التي تؤثر على شحنة Q توجد في نقطة M بطريقتين:

- بكتابة قانون كولون مع استعمال قانون التطابق.
- بحساب الحقل الكهربائي في M ثم نكتب: $\vec{F}_Q(M) = Q\cdot\vec{E}(M)$.

من العبارة السابقة التي توجد تحت رمز الجمع $\sum$ نستنتج أن عبارة شعاع الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ في نقطة M من الفضاء الناتج عن شحنة Q تقع في نقطة O هي:



$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2}$$

أو: $$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3}$$

لأن: $$\vec{u} = \frac{\vec{O}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$$

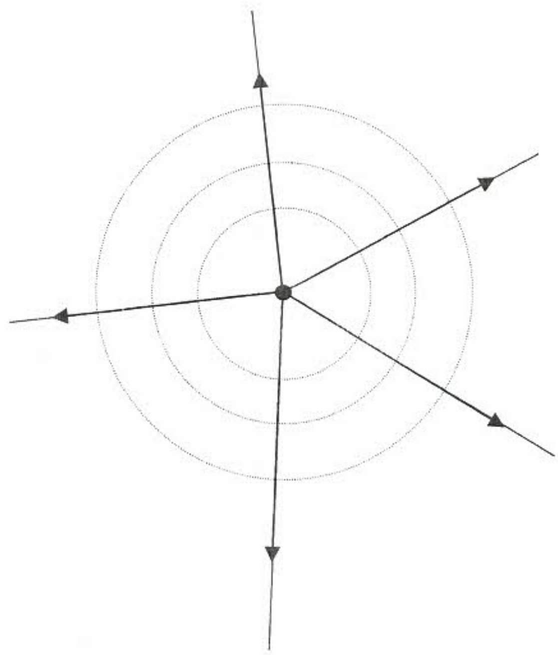
عندما نكتب $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ($r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ و $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$) فإن $\vec{E}(M)$ بدوره يكتب:

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

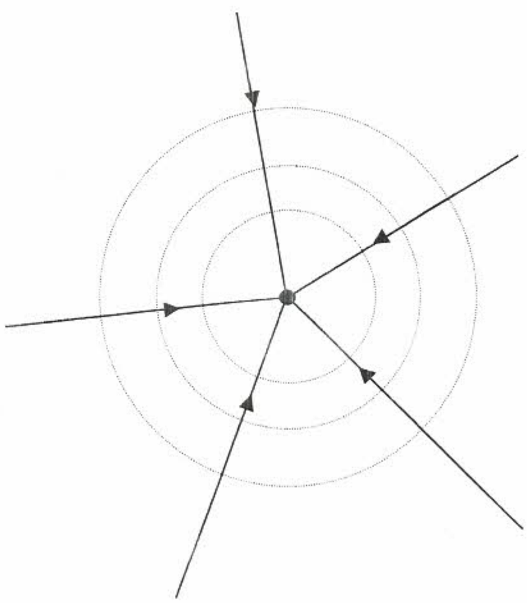
في النظام العالمي .S.I وحدة الحقل الكهربائي هي: $[E] = \frac{C}{m^2} = \frac{V}{m}$. (V=$Volt$).

ملاحظة: في موقع الشحنة O ($r \to 0$) الحقل الكهربائي يؤول إلى ما لانهاية (∞) ونقول أن **الحقل غير معرف في موقع الشحنة التي تنتجه.**

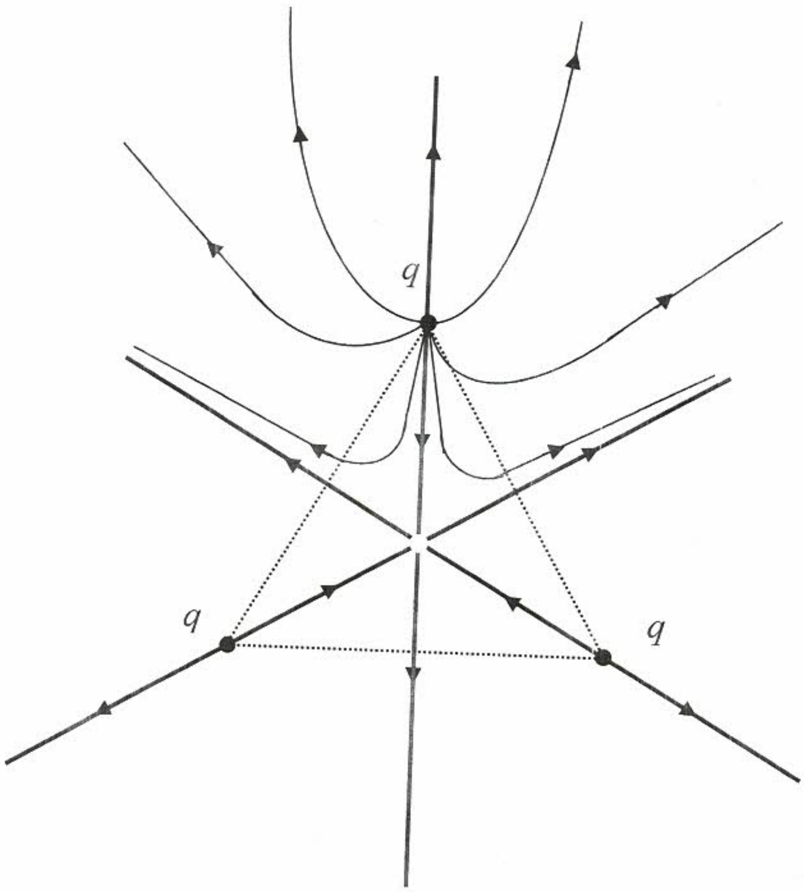
خطوط الحقل الكهربائي لا تتقاطع أبدا وهي تنطلق دائما من شحن موجبة نحو شحن سالبة أو ما لانهاية أو من ما لانهاية نحو شحن سالبة.



خطوط الحقل + سطوح تساوي الكمون لشحنة موجبة



خطوط الحقل + سطوح تساوي الكمون لشحنة سالبة



طبوغرافيا تقريبية تمثل خطوط الحقل لمجموعة ثلاث شحن موجبة q تقع عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع. الخطوط مرسومة في مستوي المثلث فقط. الخطوط المنحنية ممثلة بالنسبة لشحنة واحدة.

6- الكمون الكهربائي لشحنة نقطية (Le potentiel électrique):

رأينا في المدخل الرياضياتي (الفصل الأول) أن الحقل الشعاعي عندما يكون مشتقا من كمون (حقل محافظ)، فإنه يرتبط بهذا الكمون وفق العلاقة: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. انطلاقا من هذه العلاقة يمكن تعريف الكمون بطريقة أخرى تكتب: $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$ أي: $V(A) - V(B) = \int_{A,(C)}^{B} \vec{E}\overrightarrow{dl}$

نعتبر شحنة Q موضوعة في النقطة O. تنتج هذه الشحنة في كل الفضاء حقلا كهربائيا $\vec{E}$.

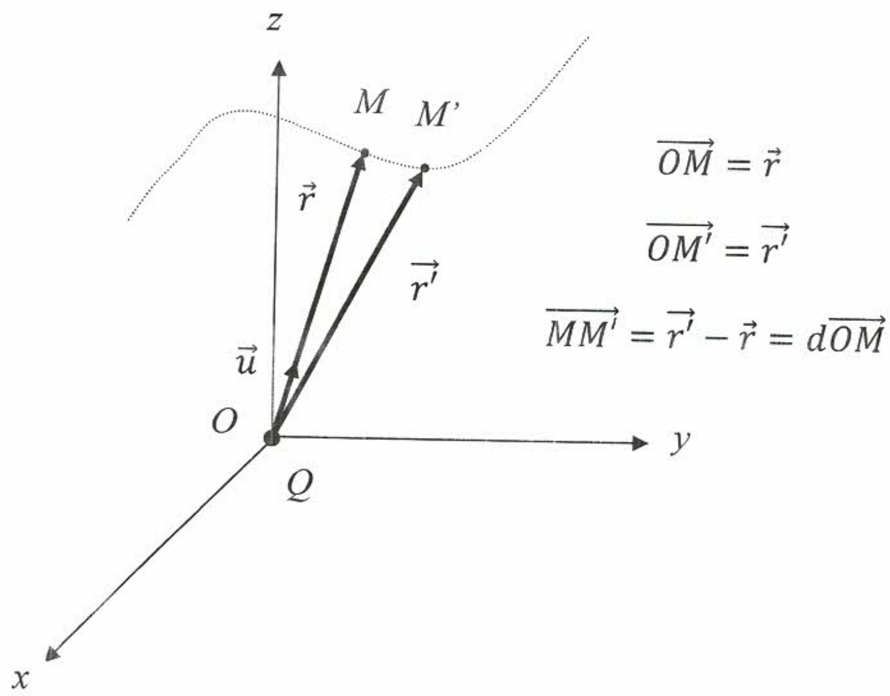
كمون الحقل $\vec{E}$ الذي يسمى **الكمون الكهربائي** في كل نقطة M من الفضاء يتبع العلاقة:

$$dV = -\vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

التي أخذنا فيها: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \cdot \vec{u}$ أي: $d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{u} + r \cdot d\vec{u}$.

إذن: $dV = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot (dr \cdot \vec{u} + r \cdot d\vec{u})$. ولأن: $d\vec{u} \perp \vec{u}$ ($\vec{u}$ شعاع واحدة)

فإننا نحصل على: $dV = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}$ وعندما نكامل نجد:



$$V(M) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + V_0$$

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + V_0}$$

ثابت التكامل V_0 يحدد مبدأ الكمون. عندما لا توجد شحن في ما لا نهاية، نأخذ عادة مبدأ الكمون في ما لا نهاية أي: $V(\infty) = 0$ ونجد: $V_0 = 0$. إذن، في حالة عدم وجود شحن أخرى في ما لا نهاية:

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$$

في حالة التوزيعات الشحنية التي تمتد إلى ما لا نهاية يصير **الكمون** $\boldsymbol{V}(\infty)$ **غير معدوم** $(V(\infty) \neq 0)$ ولتحديد V_0 يجب البحث على مكان آخر لمبدأ الكمون تكون فيه قيمة الكمون معروفة. هذا المكان يتعلق بطبيعة التوزيع الشحني الذي نقوم بدراسته (كل توزيع لا منتهي له مبدأ الكمون الخاص به).

في النظام .S.I: $[V] = C/m = [E] \cdot [L] = V\ (Volt)$

- **الكمون الكهربائي لمجموعة من الشحن النقطية:**

إذا كانت لدينا n شحنة كهربائية نقطية $\{Q_i\}$ موزعة في الفضاء، فإن **قانون التطابق** يسمح بكتابة الكمون الكهربائي الكلي في نقطة M بالعلاقة:

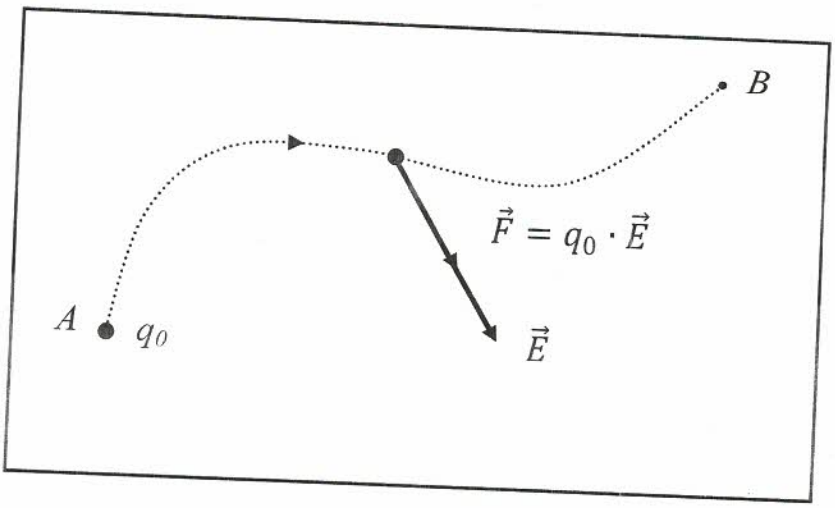
$$V(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_i} + V_0$$

ثابت الكمون V_0 يتم تحديده باختيار مبدأ للكمون الكهربائي. في حالة عدم وجود شحن في ∞، $V(\infty) = 0$ ونحصل على $V_0 = 0$. عند وجود شحن كهربائية في ∞ (التوزيع الشحني لا منتهي)، اعتبار $V(\infty) = 0$ يصير غير صحيح و $V_0 \neq 0$.

7- عمل القوة الكهربائية:

لتكن شحنة كهربائية نقطية q_0 موجودة داخل حقل كهربائي $\vec{E}$. داخل هذا الحقل تتعرض q_0 إلى قوة: $\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$. لنقل الشحنة q_0 من A إلى B داخل هذا الحقل، يتطلب بذل عمل يساوي عمل القوة $\vec{F}$.

فضاء يوجد فيه حقل $\vec{E}$



عمل القوة $\vec{F}$ معرف بالعلاقة: $dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = q_0 \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -q_0 \cdot dV$.

العمل W_A^B المبذول بين A و B هو إذن: $W_A^B = \int_A^B q_0 \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_A^B q_0 \cdot dV$

أي: $W_A^B = q_0[V(A) - V(B)]$.

$V(A) - V(B)$ يسمى فرق الكمون (الجهد) بين النقطتين A و B . من عبارة W_A^B السابقة تم تعريف وحدة الكمون المعروفة بالفولط $(Volt)$ في النظام $S.I.$ كما يلي:

" الفولط هو فرق الكمون بين نقطتين في فضاء يوجد داخل حقل كهربائي بحيث يتطلب نقل شحنة كهربائية تساوي واحد كولون $(q=1\ C)$ بين هاتين النقطتين إلى عمل يساوي واحد جول $(1\ J)$ "

$$[1\ J] = [1\ C] \times [1\ V]$$

ولهذا لدينا وحدة الطاقة: $1\ eV = 1{,}6021\ 10^{-19}\ C\ \times 1\ V = 1{,}6021\ 10^{-19}\ J$.

القوة الكهربائية $\vec{F}$ محافظة (مشتقة من الكمون V) لها طاقة كامنة E_p ترتبط بالعمل وفق العلاقة العامة: $dW = -dE_p$. وبما أن عمل $\vec{F}$ يكتب: $dW = -q \cdot dV = -d(qV)$ فإننا نستنتج أن الطاقة الكامنة لشحنة كهربائية q توجد داخل كمون V هي: $\boldsymbol{E_p = q \cdot V}$.

8- الحقل والكمون الكهربائيان لتوزيع شحني مستمر (غير نقطي):

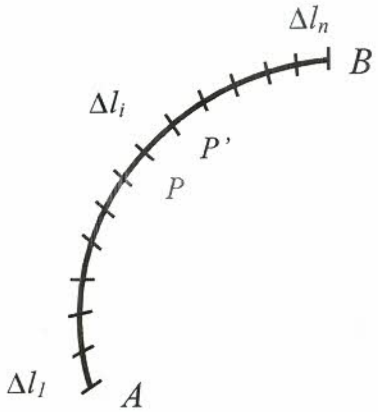
كل العلاقات السابقة التي تخص الحقل والكمون أو القوة الكهربائية تتعلق بالحالات التي تكون فيها الشحن نقطية، أي أبعادها "لا متناهية في الصغر"، وهذا صحيح فقط عندما نتعامل مع شحن الجزيئات العنصرية مثل الإلكترون e^- أو البروتون P^+. يمكن أيضا اعتبار الأجسام المشحونة التي لها أبعاد صغيرة جدا مقارنة بالمسافة التي تفصلها عن المشاهد (الموقع الذي نحسب فيه الحقل أو الكمون).

سوف نرى فيما يلي التغيرات التي تحدث في أبعاد الجسم لكي يصير غير قابل أن يمثل بشحنة نقطية وذلك مرورا بثلاث مراحل:

- أبعاد الجسم تكون معتبرة فقط في اتجاه واحد وتبقى صغيرة في الاتجاهين الباقيين. في هذه الحالة، يكون الجسم عبارة عن **سلك مشحون مستقيم أو منحني والتوزيع الشحني يسمى "توزيع خطي".**
- الجسم يكون ممتدا في اتجاهين فقط ويشكل في هذه الحالة **سطحا مستويا أو منحنيا** (مثل سطح الكرة أو السطح الجانبي للأسطوانة) والتوزيع الشحني يسمى **"توزيع سطحي".**
- الجسم يكون ممتدا في الأبعاد الثلاثة للفضاء ويشكل في هذه الحالة **حجما مشحونا** بصفة مستمرة ونتكلم عند ذلك عن **"توزيع شحني حجمي".**

1- التوزيع الشحني الخطي:

- **الكثافة الشحنية الخطية:** نعتبر سلك AB مستقيم أو منحني طوله L ويحمل شحنة كهربائية Q موزعة بانتظام على كل السلك. نسمي **الكثافة الشحنية الخطية المنتظمة** للسلك أو شحنة وحدة الطول، المقدار: $\lambda = \frac{Q}{L}\ [C/m]$.



في الحالة العامة الشحنة Q غير موزعة بانتظام على السلك والكثافة الشحنية λ تتغير عند الانتقال من نقطة إلى أخرى على السلك ونكتب: $\lambda = \frac{dQ}{dl}$.

لبيان ذلك، نعتبر نقطة P من السلك معينة بالإحداثية المنحنية l . لما نأخذ A هو المبدأ، لدينا: $\overset{\frown}{AP} = l$.

لتكن P' نقطة قريبة من P إحداثيتها $l + \Delta l$ ($\overset{\frown}{PP'} = \Delta l$).

الطول Δl يحمل شحنة ΔQ . نسمي الكثافة الشحنية الخطية عند الطول l ، المقدار $\lambda(l)$

حيث: $\lambda(l) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$. وحدة λ تبقى دائما C/m .

لحساب الشحنة الكلية Q للسلك، عند معرفة $\lambda(l)$ ، نقسم السلك إلى قطع عنصرية $\{\Delta l_i\}$.

كل قطعة Δl_i تحمل شحنة ΔQ_i بحيث: $\Delta Q_i = \lambda(l_i) \cdot \Delta l_i$. الشحنة الكلية للسلك هي

إذن: $Q = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda(l_i).\Delta l_i$. قيمة Q هي تقريبية فقط لأننا اعتبرنا القطعة Δl_i تحمل نفس الكثافة $\lambda(l_i)$. هذه القيمة تقترب من القيمة الحقيقية كلما كانت القطع Δl_i صغيرة أكثر وعندما يصير عددها لا منتهي ($n = \infty$) فإن:

$$Q = \sum_{i=1}^{i=\infty} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{i=\infty} \lambda(l_i).\Delta l_i \quad \text{أي:} \quad Q = \int dQ = \int_{L_A}^{L_B} \lambda(l) dl$$

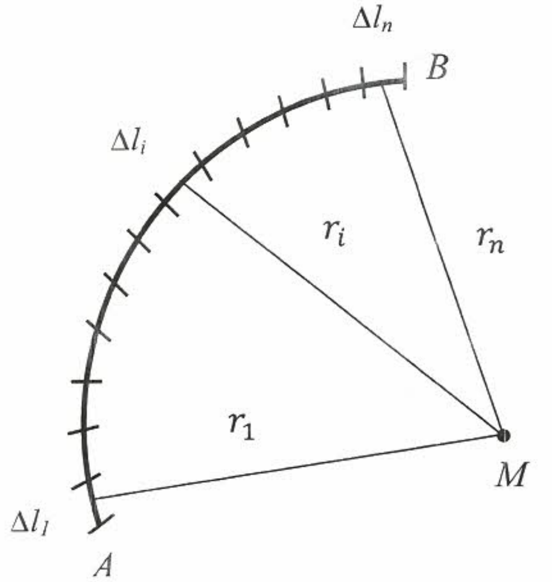
وذلك وفقا لمفهوم التكامل عند **ريمان** (***Riemann***).

عندما يكون λ منتظم (أي ثابت): $Q = \int_{L_A}^{L_B} \lambda dl = \lambda L$ لأن: $L_B - L_A = L$.

- **الكمون الكهروساكن لتوزيع شحني خطي:**

ليكن سلك AB يحمل كثافة شحنية خطية $\lambda(l)$. لحساب الكمون الكهربائي $V(M)$ في نقطة كيفية من الفضاء M ، نقسم السلك إلى قطع صغيرة $\{\Delta l_i\}$ بحيث يمكن اعتبار كل النقاط التي

تنتمي للقطعة Δl_i توجد على نفس المسافة r_i من M ، الكثافة الشحنية $\lambda(l_i)$ على القطعة Δl_i ثابتة والشحنة ΔQ_i للقطعة Δl_i شحنة نقطية.



القطعة Δl_1 تنتج في M كمونا عنصريا ΔV_1 حيث:

$$\Delta V_1 = \frac{\Delta Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_1} = \frac{\lambda(l_1).\Delta l_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_1}$$

القطعة Δl_i تنتج:

$$\Delta V_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_i} = \frac{\lambda(l_i).\Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_i}$$

الكمون الكلي $V(M)$ هو مجموع الكمونات العنصرية ΔV_i الناتجة عن كل القطع $\{\Delta l_i\}$.

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda(l_i)}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_i}$$

عندما يكون عدد القطع $\{\Delta l_i\}$ لا منتهي $(n = \infty)$ ، نحصل على:

$$V(M) = \int dV = \int_{L_A}^{L_B} \frac{\lambda(l)\, dl}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r(l)}$$

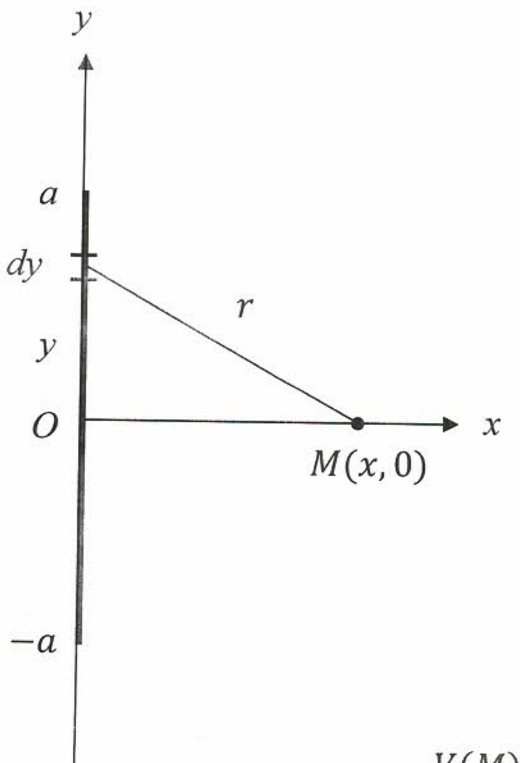
أو:

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L_A}^{L_B} \frac{\lambda(l)\, dl}{r(l)}}$$

سهولة حساب $V(M)$ تتعلق بطبيعة التوزيع الشحني أي بشكل الدوال $\lambda(l)$ و $r(l)$.

ملاحظة: المعادلة السابقة لحساب $V(M)$ صحيحة فقط في حالة سلك طوله محدود. لما يكون طول السلك لا منتهي $(L = L_B - L_A = \infty)$ يجب إضافة ثابت V_0 يتم تحديده باختيار مبدأ للكمون لا يقع في ما لا نهاية.

تطبيق: 1- احسب الكمون الكهربائي لسلك مستقيم طوله $L = 2a$ يحمل كثافة شحنية منتظمة λ في نقطة M تقع على محور عمودي للسلك.



لإجراء مثل هذا الحساب نفضل أن نستعمل المعلم $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ حيث $\overrightarrow{Ox}$ محور السلك الذي يمر من M كما هو في الشكل. نأخذ قطعة عنصرية dy من السلك والتي نعتبرها كشحنة dq حيث: $dq = \lambda\, dy$. هذه الشحنة تنتج في M كمونا عنصريا dV حيث:

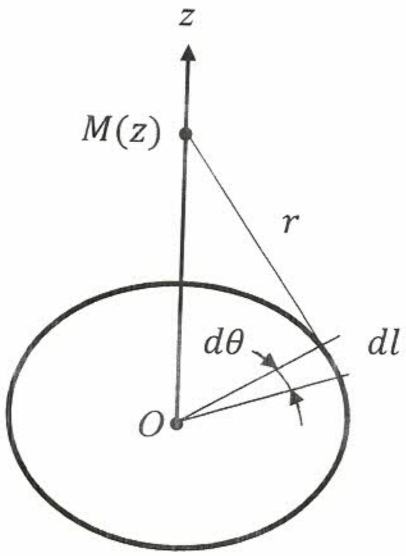
$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

وبعدما نكامل نجد: $V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ln\, (y + \sqrt{x^2 + y^2}\right]_{-a}^{a}$

وفي النهاية نحصل على: $V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot ln\, \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{-a + \sqrt{x^2 + a^2}}\right)$

2- الكمون الكهربائي الناتج عن حلقة دائرية نصف قطرها R تحمل كثافة شحنية خطية منتظمة λ في نقطة M تقع على محورها $\overrightarrow{Oz}$.



القوس العنصري d من الحلقة يملك شحنة عنصرية نعتبرها نقطية $dq = \lambda\, dl$ تنتج في M كمونا عنصريا:

$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$ حيث: $dl = Rd\theta$ و $r = \sqrt{R^2+z^2}$. إذن: $dV = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$.

الكمون $V(M)$ لكل الحلقة نحصل بالتكامل على θ ونجد:

$$V(M) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} .$$

أو: $V(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$.

للحصول على $V(M)$ بطريقة مختصرة كان يكفي أن نلاحظ أن كل طول الحلقة يوجد على نفس المسافة r من M . أي أن الشحنة الكلية للحلقة توجد على نفس المسافة r من M وباستعمال قانون التطابق لدينا مباشرة: $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$.

- **الحقل الكهروساكن لتوزيع شحني خطي:**

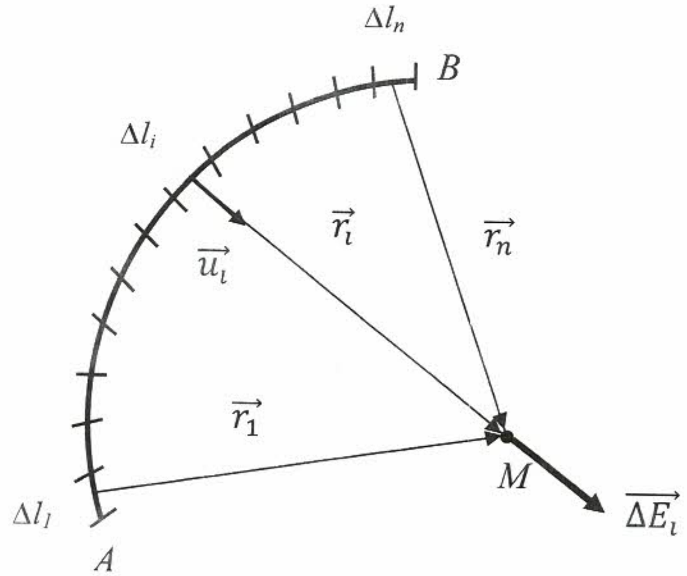
عندما يكون $V(M)$ معروفا، يمكن الحصول على الحقل $\vec{E}(M)$ مباشرة من العلاقة: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ بشرط أن تكون M نقطة كيفية من الفضاء.

يمكن الحصول على $\vec{E}(M)$ بالحساب المباشر ونستعمل لذلك نفس الطريقة التي طبقناها في حساب الكمون $V(M)$. نقسم السلك إلى قطع صغيرة $\{\Delta l_i\}$ ونكتب عبارة الحقل $\overrightarrow{\Delta E_i}(M)$ الناتج عن كل قطعة Δl_i ثم باستعمال قانون التطابق نحسب الحقل الكلي $\vec{E}(M)$.

$$\overrightarrow{\Delta E_i}(M) = \frac{\lambda_i\cdot\Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r_i}}{r_i^{\,3}} = \frac{\lambda_i\cdot\Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u_i}}{r_i^{\,2}}$$

الحقل الكلي $\vec{E}(M)$ هو مجموع الحقول $\overrightarrow{\Delta E_i}$.

$$\vec{E}(M)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\cdot\Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u_i}}{{r_i}^2}$$



وعندما يكون عدد القطع $\{\Delta l_i\}$ كبير جدا $(n\longrightarrow\infty)$ فإن عبارة $\vec{E}(M)$ تحت الجمع $\sum$ تصير تكاملا وتكتب:

$$\vec{E}(M)=\int_{L_A}^{L_B}\frac{\lambda(l)\cdot dl}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}(l)}{r(l)^2}$$

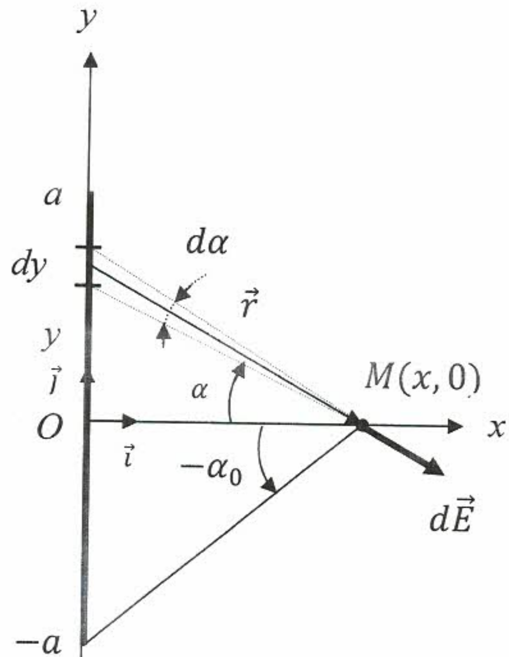
وعندما يكون التوزيع الشحني منتظم (λ ثابت):

$$\vec{E}(M)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L_A}^{L_B}\frac{\vec{u}(l)\,dl}{r(l)^2}$$

ولأن: $\vec{u}(l)=\frac{\vec{r}(l)}{r(l)}$ فإن عبارة $\vec{E}(M)$ بدلالة $\vec{r}(l)$ تكتب:

$$\vec{E}(M)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L_A}^{L_B}\frac{\vec{r}(l)\,dl}{r(l)^3}$$

تطبيق: 1- نفس التوزيع السابق في حالة الكمون.



$$d\vec{E} = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} \quad , \qquad r^3 = (x^2 + y^2)^{3/2}$$

وعندما نعوض نستطيع أن نكتب:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda\, x\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{\imath}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\lambda\, y\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{\jmath}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

وعندما نكامل لدينا:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\, x}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\imath} \int_{-a}^{a} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\jmath} \int_{-a}^{a} \frac{y\, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

بسبب تناظر التوزيع ألشحني، الحقل $\vec{E}(M)$ يملك مركبة في الاتجاه $\vec{\imath}$ فقط. لذلك، ومن دون إجراء أي حساب، فإن التكامل الثاني في عبارة $\vec{E}(M)$ يجب أن يكون معدوما ويبقى:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\, x}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\imath} \int_{-a}^{a} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

حساب هذا التكامل ليس بسيطا ونفضل في حالة هذا التوزيع استعمال طريقة أخرى لحساب $\vec{E}(M)$. فعوض استعمال المتغيرة نأخذ مكانها المتغيرة α التي تمثل الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{MO}$ ومعاكس الشعاع $\vec{r}$ كما يبين الشكل. العلاقة التي تربط بين و α هي: $tg\alpha = \frac{y}{x}$ ونحصل على الطول العنصري dy بدلالة الزاوية العنصرية $d\alpha$ من تفاضل هذه العلاقة الذي يكتب: $\frac{d\alpha}{cos\alpha^2} = \frac{dy}{x}$. ولما نعوض في عبارة التكامل الأخير نجد $\vec{E}(M)$ ويكفي لذلك أن

نلاحظ أن: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$. نفضل أن نجد هذه النتيجة بإعادة كتابة المعادلات من البداية بدلالة α . لدينا: $d\vec{E} = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\ _0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\lambda\, x\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 cos\alpha^2}\cdot\frac{r\, cos\alpha\, \vec{\imath} - r\, sin\alpha\, \vec{\jmath}}{r^3}$.

وبما أن: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ فإننا نجد بعد التعويض:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{d\alpha}{x}\cdot(cos\alpha\,\vec{\imath} - sin\alpha\,\vec{\jmath})$$

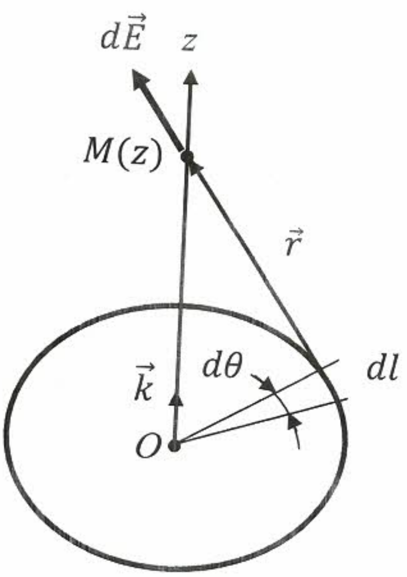
إذن:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left[\vec{\imath}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} cos\alpha\, d\alpha - \vec{\jmath}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} sin\alpha\, d\alpha\right]$$

ونجد في النهاية:

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin\alpha_0}{x}\,\vec{\imath}}$$

في حالة سلك لا منتهي (طويل جدا) $\alpha_0 = \pi/2$: $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x}\,\vec{\imath}$



2- مثال الحلقة السابق.

نستعمل الإحداثيات الاسطوانية لحل المشكلة.

لدينا:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda\, R\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{r} = -R\vec{u}_\rho + z\vec{k}\ ,\ r^3 = (z^2 + R^2)^{3/2}$$

$$d\vec{E} = \frac{-\lambda\, R^2\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\,\vec{u}_\rho + \frac{\lambda\, R\, z\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\,\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{-\lambda\, R^2}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\vec{u}_\rho\, d\theta + \frac{\lambda\, R\, z\,\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

بسبب التناظر حول المحور $\overrightarrow{Oz}$ للحلقة، فإن $\vec{E}(M)$ محمول بالمحور $\overrightarrow{Oz}$ أي له مركبة في الاتجاه $\vec{k}$ فقط. إذن التكامل الأول في عبارة $\vec{E}(M)$ معدوم ويبقى:

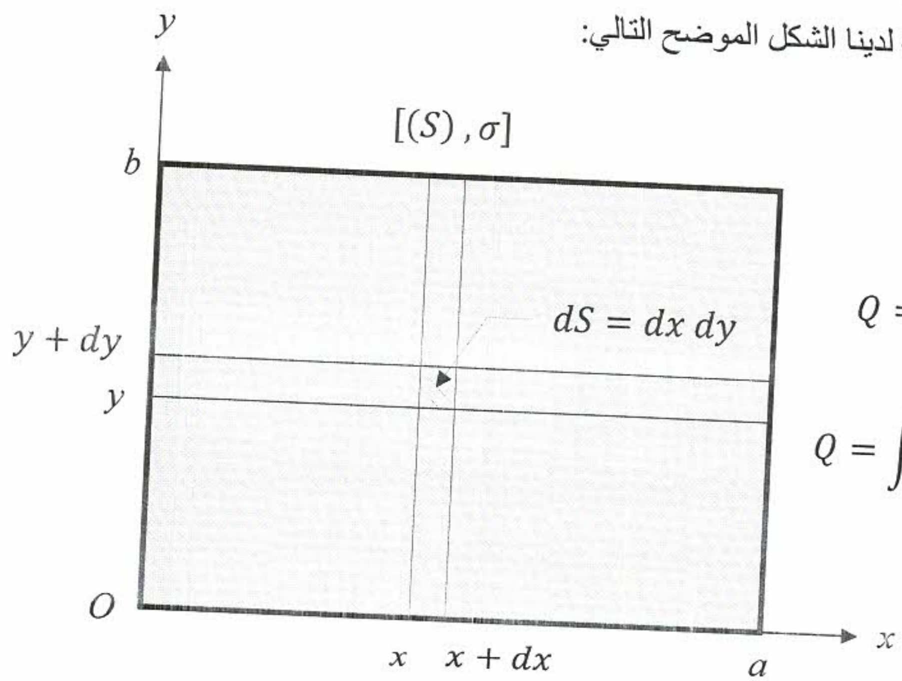
$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}$$

2- التوزيع الشحني السطحي:

- **الكثافة الشحنية السطحية:** نعتبر سطح (S) يحمل شحنة كهربائية Q موزعة بانتظام. نسمي الكثافة الشحنية السطحية المقدار: $\sigma = Q/_S$ حيث S هي مساحة السطح (S). يمكن أن يكون السطح غير مشحون بصفة منتظمة وفي هذه الحالة يجب تحديد الكثافة الشحنية في كل نقطة من السطح وذلك باستعمال جملة الإحداثيات المناسبة لشكل السطح (S).

  - في حالة السطح المستوي نستعمل الإحداثيات الديكارتية أو القطبية.
  - السطح الأسطواني يتطلب استعمال الإحداثيات الأسطوانية.
  - السطح الكروي يتطلب الإحداثيات الكروية.
  - في حالة السطح الكيفي يجب استعمال طرق الحسابات الرقمية.

مثلا، في الإحداثيات الديكارتية لدينا الشكل الموضح التالي:



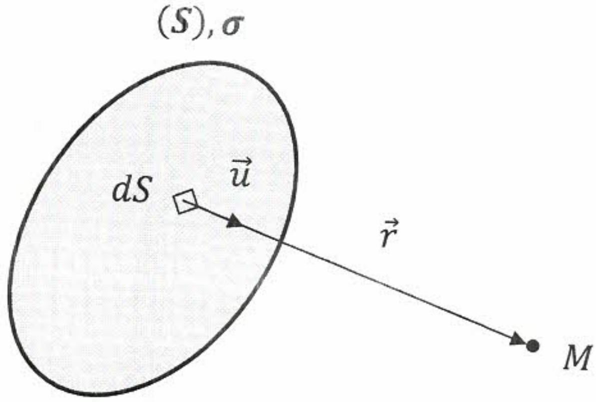
$$\sigma = \sigma(x, y)$$

$$Q = \iint_{(S)} \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

$$Q = \int_0^b \left[\int_0^a \sigma(x, y)\, dx \right] dy$$

$$[\sigma] = C/_{m^2}$$

▪ **الكمون والحقل:**



ليكن سطح (S) يحمل كثافة شحنية سطحية σ . لحساب الكمون أو الحقل في نقطة M من الفضاء، نعتبر مساحة عنصرية dS من السطح (S) . هذه المساحة تحمل شحنة عنصرية $dQ = \sigma\, dS$ يمكن اعتبارها كشحنة نقطية. أذا كانت r هي المسافة بين dS والنقطة M ، فإن dQ تنتج في M كمونا عنصريا dV يكتب:

الكمون الكهربائي الناتج عن كل الشحنة الموجودة على (S) هو:

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma\, dS}{r}}$$

عندما يكون التوزيع الشحني منتظم، أي σ ثابت:

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{dS}{r}}$$

وبنفس الطريقة نحصل على الحقل الكهربائي في M بالعلاقة :

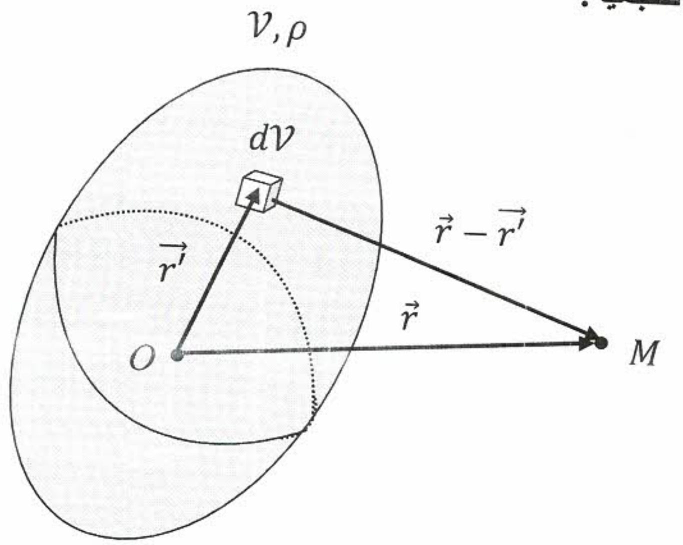
$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma\, \vec{r}}{r^3}\, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma\, \vec{u}}{r^2}\, dS}$$

وعندما σ ثابت :

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\vec{r}}{r^3}\, dS = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\vec{u}}{r^2}\, dS}$$

$\boldsymbol{\vec{u}}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\boldsymbol{\vec{r}}$

3- الكثافة الشحنية الحجمية:



عندما يكون لدينا حجم $\mathcal{V}$ يحمل شحنة $\mathcal{Q}$ موزعة بانتظام داخل هذا الحجم فإن الكثافة الشحنية الحجمية هي: $\rho = \mathcal{Q}/\mathcal{V}$ مع $[\rho] = C/m^3$.

عندما تكون $\mathcal{Q}$ غير موزعة بانتظام على الحجم فإن ρ تصير تتعلق بموقع الحجم $d\mathcal{V}$ المحدد بالشعاع $\vec{r'}$ داخل الحجم ونكتب: $dQ = \rho\left(\vec{r'}\right) d\mathcal{V}$ والشحنة الكلية هي:

$$\mathcal{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r'})\, d\mathcal{V}$$

- **الكمون الكهربائي:** الحجم العنصري $d\mathcal{V}$ الذي يحيط بالنقطة $\vec{r'}$ ينتج في النقطة المعرفة بالشعاع $\vec{r}$ كمونا عنصريا dV بحيث:

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left\|\vec{r} - \vec{r'}\right\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho\left(\vec{r'}\right) d\mathcal{V}}{\left\|\vec{r} - \vec{r'}\right\|}$$

أي:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right) d\mathcal{V}}{\left\|\vec{r} - \vec{r'}\right\|}$$

وعندما يكون التوزيع الشحني منتظم (ρ ثابت):

$$V(M) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{d\mathcal{V}}{\left\|\vec{r} - \vec{r'}\right\|}$$

- **الحقل الكهربائي:** بنفس الطريقة نحصل على الحقل الكهربائي العنصري:

$$d\vec{E} = \frac{\rho\left(\vec{r'}\right) d\mathcal{V}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{r} - \vec{r'}\right\|^2}$$

أي:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)\vec{u}}{\left\|\vec{r} - \vec{r'}\right\|^2} d\mathcal{V}$$

ولما ρ ثابت:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{r} - \vec{r'}\right\|^2} d\mathcal{V}$$

حيث $\vec{u}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{r} - \vec{r'}$ الذي يصل بين $d\mathcal{V}$ و M .

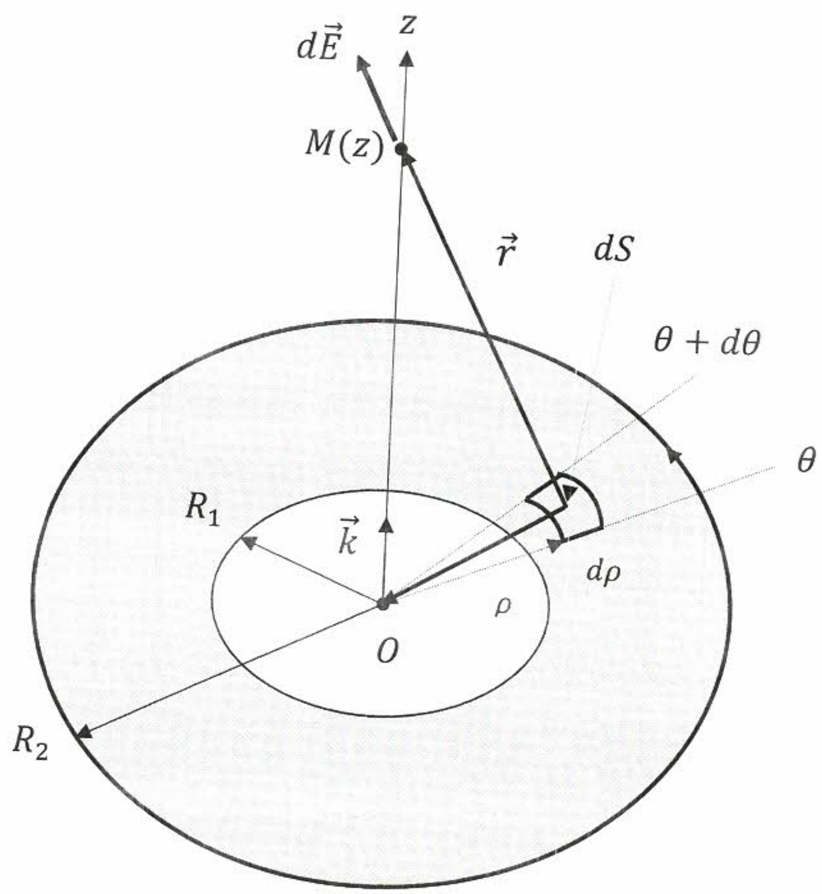
تطبيق: الحقل والكمون الناتجان عن قرص مجوف نصف قطره الداخلي R_1 والخارجي R_2 ويحمل كثافة شحنية سطحية منتظمة σ في نقطة M توجد على محوره $\overrightarrow{Oz}$.

الشكل الدائري للتوزيع الشحني وموقع النقطة M على المحور $\overrightarrow{Oz}$ يجعل جملة الإحداثيات الأسطوانية هي الأفضل لحل المشكلة. مستوي القرص هو المستوي القطبي. المساحة العنصرية من القرص تكتب: $dS = \rho\, d\rho\, d\theta$. هذه المساحة تحمل شحنة عنصرية $dQ = \sigma\, dS$ يمكن اعتبارها كشحنة نقطية . في النقطة M ، dQ تنتج حقلا عنصريا $d\vec{E}$ حيث:

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

لدينا: $\vec{r} = -\rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$ و $r^3 = (\rho^2 + z^2)^{3/2}$ وعندما نعوض نحصل على:

$$d\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho^2\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\, \vec{u}_\rho + \frac{\sigma\, z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\, \vec{k}$$



الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ يساوي تكامل الحقل العنصري $d\vec{E}$ على كل المساحة المشحونة بين R_1 و R_2 :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\rho^2 \vec{u}_\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\, d\rho\, d\theta$$

$$+\frac{\sigma\, z}{4\pi\varepsilon_0}\, \vec{k} \iint_{(S)} \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\, d\rho\, d\theta$$

كون النقطة تنتمي لمحور القرص $\overrightarrow{Oz}$ يستلزم أن $\vec{E}(M)$ محمول بالمحور أي له مركبة في الاتجاه $\vec{k}$ فقط. إذن التكامل الأول في عبارة $\vec{E}(M)$ معدوم ولا فائدة من حسابه ويبقى:

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma\, z}{4\pi\varepsilon_0}\, \vec{k} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\, d\rho \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

وبما أن: $\int \frac{x\, dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}} + C$ ، إذن:

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\vec{k}\left[\frac{1}{\sqrt{{R_1}^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{{R_2}^2+z^2}}\right]\times 2\pi$$

أو:

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{{R_1}^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{{R_2}^2+z^2}}\right]\vec{k}}$$

في حالة مستوي لا منتهي ($R_2 \to \infty$ و $R_1 \to 0$):

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}} \begin{cases} +: z > 0 \\ -: z < 0 \end{cases}$$

الشحنة dQ تنتج أيضا في M كمونا عنصريا : $dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$ ولما نكامل نحصل على: $\int_0^{2\pi} d\theta \times \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} = V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}d\rho d\theta$

وبعد الحساب النهائي نجد:

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{{R_2}^2+z^2} - \sqrt{{R_1}^2+z^2}\right]}$$

يمكن أن نتأكد بسهولة أن $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$ أي: $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$.

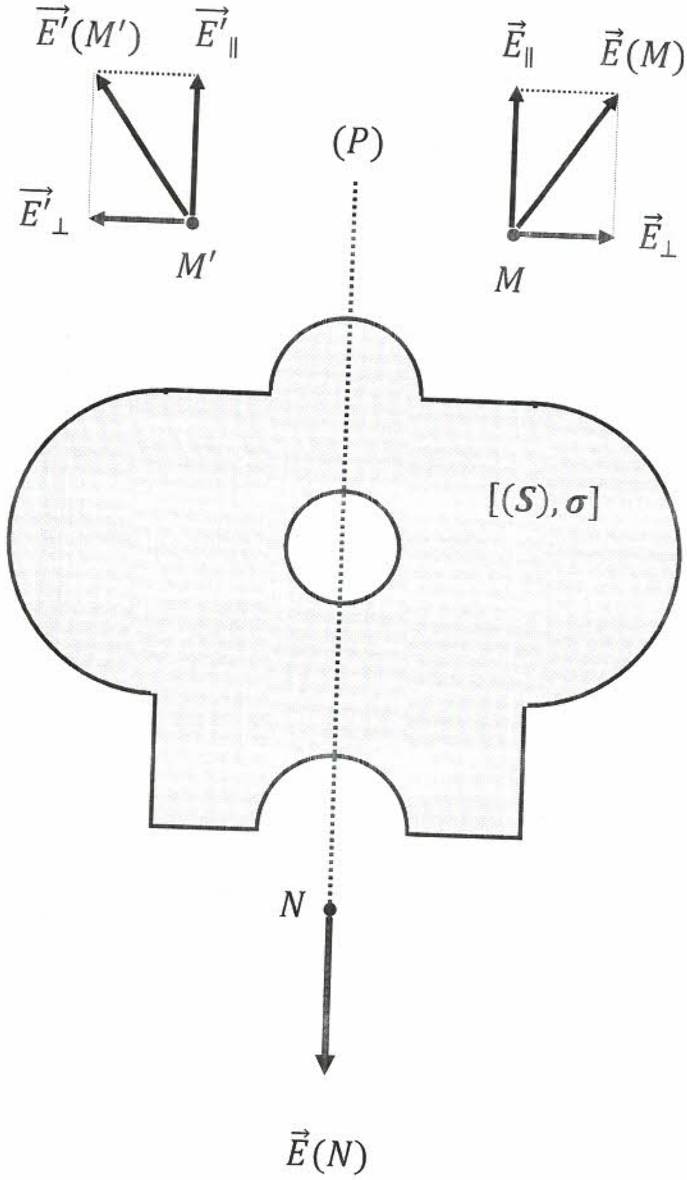
تنبيه: لا يمكن الحصول على $V(M)$ في حالة **قرص لا منتهي** انطلاقا من النتيجة السابقة لأنه لا يمكن اختيار مبدأ الكمون في ما لا نهاية عندما يمتد التوزيع الشحني إلى ما لا نهاية، ففي هذه الحالة: $V(\infty) \neq 0$.

9- الحقل الكهربائي وقواعد التناظر:

الدراسة الكمية للظواهر الكهروساكنة يتطلب ربط الأفعال (الحقل ، الكمون ، الطاقة ...) بالأسباب التي أدت إليها (التوزيعات الشحنية). حساب هذه الظواهر عن طريق التكامل هو في أحيان كثيرة معقد وشاق. هذا الحساب يمكن أن يصير مختصرا وبسيطا عندما تكون هذه التوزيعات تملك عناصر تناظر معينة.

عناصر تناظر بسيطة:

- **مستوي تناظر (مرآة):** مستوي التناظر، المستوي (P) ، يقسم التوزيع إلى نصفين متناظرين.



▪في نقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة لمستوي التناظر (P)، $\vec{E}(M)$ و $\vec{E'}(M')$ أيضا متناظران.

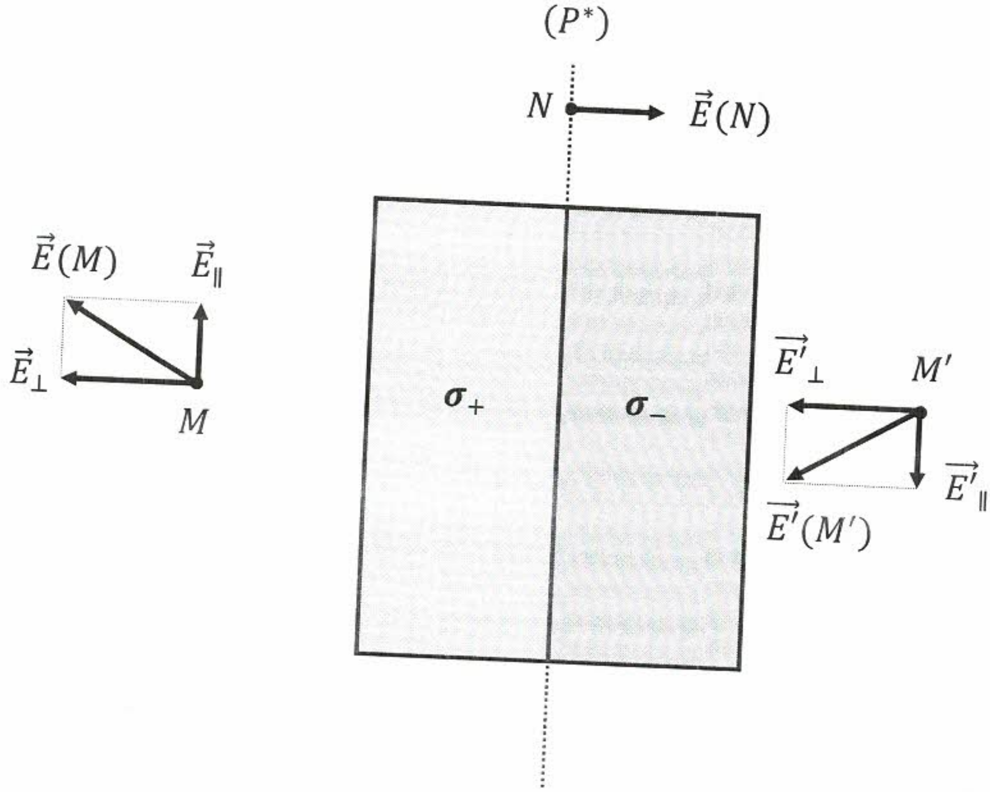
▪ $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E'}_{\parallel}$ و $\vec{E}_{\perp} = -\vec{E'}_{\perp}$

حيث $\vec{E}_{\parallel}$ مركبة الحقل الموازية لمستوي التناظر و $\vec{E}_{\perp}$ المركبة العمودية عليه.

▪ $V(M) = V'(M')$

▪في نقطة N تنتمي لمستوي التناظر، $\vec{E}(N)$ ينتمي لمستوي التناظر.

- **مستوي عكس تناظر:** هو مستوي، المستوي (P^*) ، يقسم التوزيع الشحني إلى نصفين متناظرين في الشكل و**متعاكسين** في الشحنة الكهربائية.

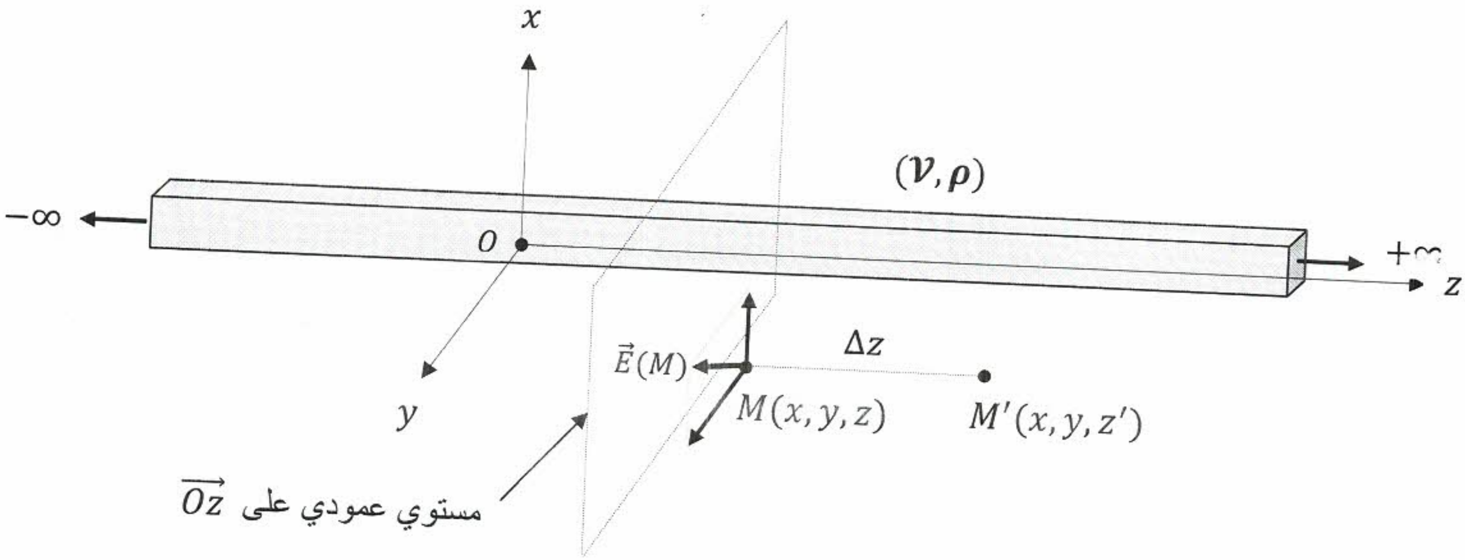


- في نقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة للمستوي (P^*) ، $\vec{E}(M)$ و $\vec{E'}(M')$ عكس متناظران.
- $\vec{E}_{\parallel} = -\vec{E'}_{\parallel}$ و $\vec{E}_{\perp} = \vec{E'}_{\perp}$ و $V(M) = -V'(M')$.
- في نقطة تنتمي لمستوي عكس التناظر (P^*) ، $\vec{E}(N)$ عمودي على (P^*) **وخاصة** $\boldsymbol{V(N) = 0}$.

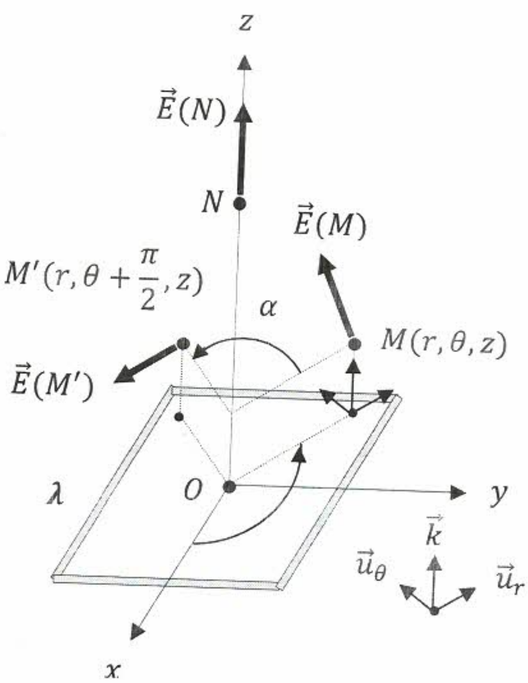
- **الاتغير بالانسحاب:** عندما لا يتغير توزيع شحني بانسحاب Δz في الاتجاه الموازي للمحور $\overrightarrow{Oz}$ ، فإن النقطتين $M(x, y, z)$ و $M'(x, y, z + \Delta z)$ تشاهدان نفس التوزيع الشحني والحقل الكهربائي هو نفسه في النقطتين: $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y, z + \Delta z)$. الاتغير بالانسحاب يعني أن الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ يساوي $\vec{E}(M')$ ، أو: $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y, z')$ حيث $z' = z + \Delta z$ ، وهذا يعني أن الحقل $\vec{E}(M)$ يتعلق فقط بالمتغيرتين x و y ونكتب: $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y)$.

كل مستوي عمودي على المحور $\overrightarrow{Oz}$ هو مستوي تناظر، أي الحقل $\vec{E}(x, y)$ ينتمي إلى هذا المستوي. إذن، الحقل الكهربائي في أي نقطة $M(x, y, z)$ هو من الشكل:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(x,y) = E_x(x,y)\,\vec{i} + E_y(x,y)\,\vec{j}$$



- **الاتغير بالدوران – محور التناظر:** عندما لا يتغير توزيع شحني بالدوران حول المحور $\overrightarrow{Oz}$ بزاوية $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ، فإن النقطتين M و M' التي نحصل بالدوران يشاهدان نفس التوزيع الشحني ويكون لذلك $\vec{E}(M) = \vec{E}(M')$.



مربع مشحون بكثافة خطية منتظمة λ ، $\overrightarrow{Oz}$ محور تناظر المربع هو أيضا محور تناظر للتوزيع الشحني ، والدوران حوله بزاوية $\alpha = \pi/4$ يحافظ على شكل التوزيع الشحني .

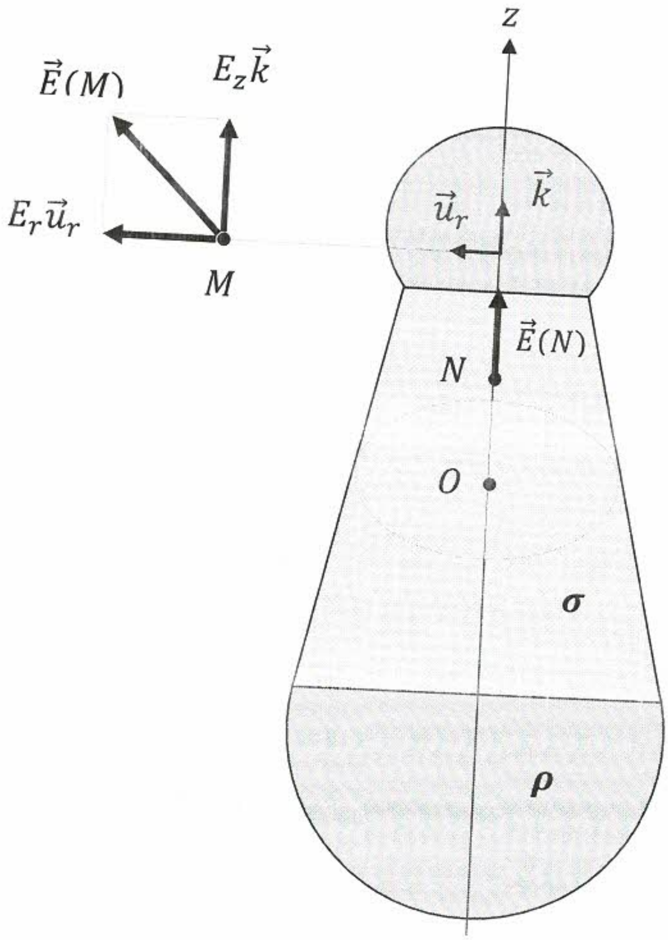
في الإحداثيات $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{k}$$

$$\vec{E}(M') = E_r\left(r,\theta+\frac{\pi}{2},z\right)\vec{u}_r + E_\theta\left(r,\theta+\frac{\pi}{2},z\right)\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta+\frac{\pi}{2},z)\vec{k}$$

تنبيه: يجب أن نتذكر دائما أن $\vec{u}_r$ و $\vec{u}_\theta$ يغيران اتجاههما مع الزاوية θ والمساواة السابقة تعني فقط أن: $E_r(r,\theta,z) = E_r\left(r,\theta+\frac{\pi}{2},z\right)$ و $E_\theta(r,\theta,z) = E_\theta\left(r,\theta+\frac{\pi}{2},z\right)$ و $E_z(r,\theta,z) = E_z(r,\theta+\frac{\pi}{2},z)$.

عندما تكون الزاوية α كيفية، يعني أن أي دوران حول محور التناظر $\overrightarrow{Oz}$ يحافظ على شكل التوزيع الشحني، فإن $\vec{E}(M)$ لا يتعلق بالزاوية θ ومركبته في الاتجاه $\vec{u}_\theta$ معدومة ونكتب:



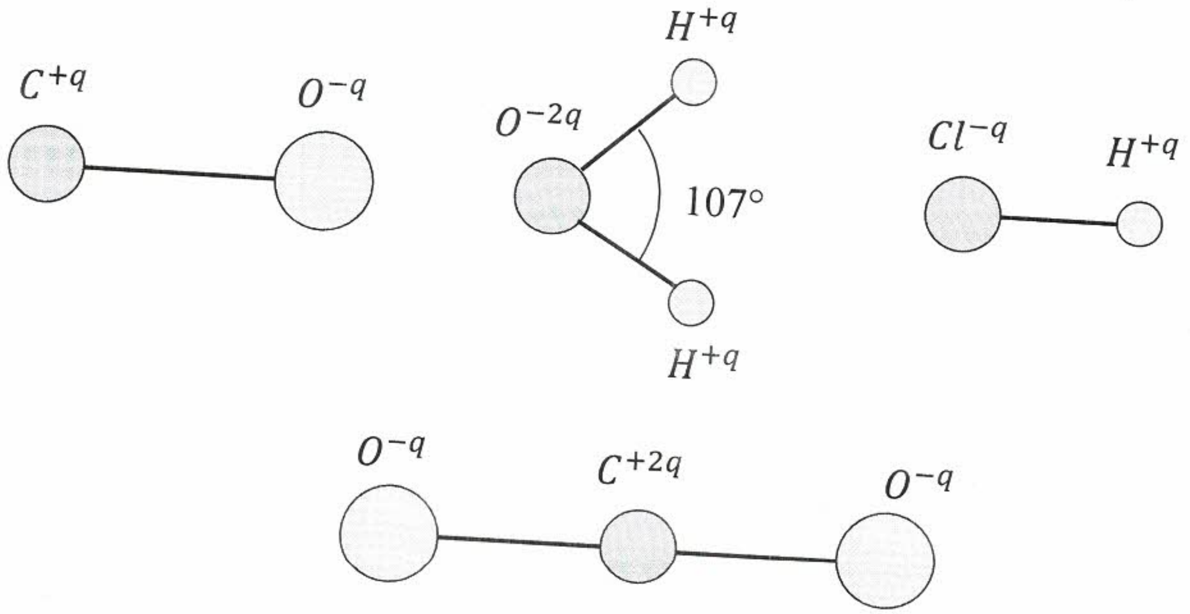
إن أهم خاصية ناتجة عن وجود محور تناظر للتوزيع الشحني هي:

في أي نقطة N تنتمي إلى المحور $\overrightarrow{Oz}$ ($r = 0$)، فإن $\vec{E}(N)$ يكون محمولا بالمحور ونكتب: $\vec{E}(N) = E(z)\,\vec{k}$

القانون العام الذي يحكم التناظر في الفيزياء هو قانون كيوري (Curie) التالي: " الفعل يملك على الأقل تناظر السبب ". ونستنتج منه أن الحقل، الكمون، خطوط الحقل، السطوح المتساوية الكمون، ... يملكون على الأقل تناظر توزيع الشحنة الكهربائية.

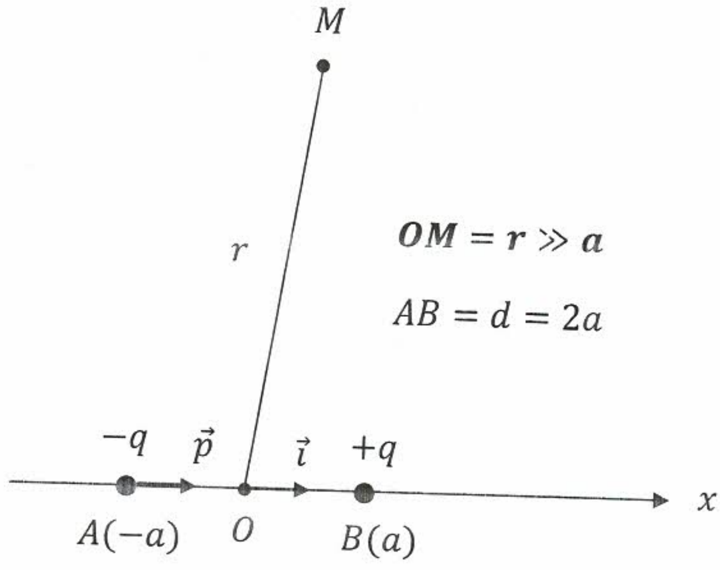
10- ثنائي القطب الكهربائي (Dipôle électrique):

جميع المواد في حالتها الطبيعية هي محايدة ، أي شحنتها الكهربائية الكلية في المستوى العياني معدومة. غير أنه في كثير منها، مركزي الشحن الموجبة والشحن السالبة للعناصر الكيميائية المكونة لها هما غير متطابقان. يمكن إذن تمثيل هذه المواد في حالتها المجهرية بعناصر أولية (جزيئات مستقطبة) مشكلة من شحنتين نقطيتين، موجبة $+q$ وسالبة $-q$ ، توجدان على مسافة d من بعضهما. نسمي كل جملة مشكلة من هاتين الشحنتين " **ثنائي قطب كهربائي** ". الجزيئات مثل HCl ، H_2O ، CO ، CO_2 نماذج لثنائيات أقطاب كهربائية.



- **تعريف:** ثنائي القطب الكهربائي هو مجموعة شحنتين كهربائيتين نقطيتين متعاكستين $+q$ و $-q$ مفصولتين بمسافة $d = 2a$ صغيرة جدا أمام المسافة r التي يبعد بها عن النقطة M حيث نلاحظ فعله.

- **عزم ثنائي القطب الكهربائي:** نسمي عزم ثنائي القطب الكهربائي المقدار الشعاعي $\vec{p} = q\,\overrightarrow{AB}$ الموجه من الشحنة $-q$ نحو الشحنة $+q$. في النظام $S.I.$ وحدة $\vec{p}$ هي $[C \cdot m]$. هذه الوحدة كبيرة جدا ولهذا نستعمل عادة وحدة الدوباي (Debye) لإعطاء عزم ثنائي القطب الخاص بالجزيئات: $1\ Debye\ (D) = 1/3\ 10^{-29}\ C.m$.



ثنائي القطب الكهربائي

- **عبارات الكمون والحقل في نقطة بعيدة عن ثنائي القطب:**

معرفة الفعل الكهربائي لهذين الشحنتين في المحيط المجاور لهما يتطلب تحديد الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناتج عنهما. في مثل هذه الحالة، نطبق عادة قانون التطابق ونحسب مجموع الحقل $\vec{E} = \vec{E}_{-q} + \vec{E}_{+q}$. في حالة ثنائي القطب، حساب الحقل من عبارة الكمون باستعمال القانون $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ هو عملية أسهل من الحساب المباشر. شعاع الحقل الكهربائي في أي نقطة M من الفضاء يوجد في المستوي (A, B, M) الذي يمثل مستوي تناظر للتوزيع الشحني (كل المستويات التي تحمل المحور $\overrightarrow{Ox}$ الحامل للشحنتين هي مستويات تناظر والمحور $\overrightarrow{Ox}$ هو محور تناظر). جملة الإحداثيات المناسبة لدراسة ثنائي القطب الكهربائي هي القطبية $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ في المستوي (A, B, M) مع اختيار $\overrightarrow{Ox}$ هو المحور القطبي.

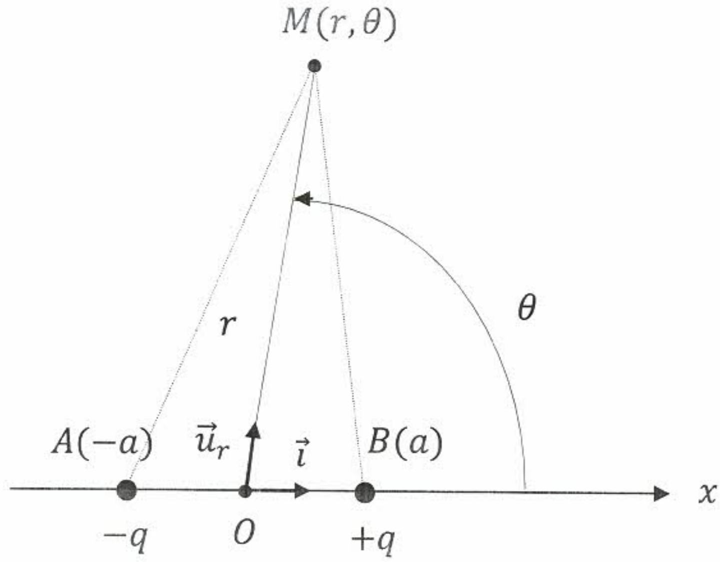
حساب الكمون الكهربائي:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\overline{BM}} - \frac{1}{\overline{AM}}\right)$$

لدينا: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = a\,\vec{i} + r\,\vec{u}_r$ و $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = -a\,\vec{i} + r\,\vec{u}_r$

إذن: $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = a^2 + r^2 + 2\,a\,r\,cos\theta$

و: $\overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM} = a^2 + r^2 - 2\,a\,r\,cos\theta$



ونستنتج أن: $$\overline{AM} = \|\overrightarrow{AM}\| = r\left(1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{2\,a\,cos\theta}{r}\right)^{1/2}$$

و: $$\overline{BM} = \|\overrightarrow{BM}\| = r\left(1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2\,a\,cos\theta}{r}\right)^{1/2}$$

وبما أن M بعيدة جدا عن ثنائي القطب، أي عن O ، فإن $a \ll r$ ويمكن أن نكتب:

$$\overline{AM} \approx r\left(1+\frac{2\,a\,cos\theta}{r}\right)^{1/2} \approx r\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\,a\,cos\theta}{r}\right) = r + a\,cos\theta$$

و

$$\overline{BM} \approx r\left(1-\frac{2\,a\,cos\theta}{r}\right)^{1/2} \approx r\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\,a\,cos\theta}{r}\right) = r - a\,cos\theta$$

لأن: $(1\mp\varepsilon)^n \approx 1\mp n\,\varepsilon$ لما: $\varepsilon \ll 1$

وعندما نعوض في عبارة الكمون $V(M)$ نجد:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-a\,cos\theta}-\frac{1}{r+a\,cos\theta}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\,a\,cos\theta}{r^2-a^2cos\theta^2}$$

أو:

$$\boldsymbol{V(M) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\,a\,cos\theta}{r^2}}$$

وفي النهاية يمكن أن نكتب:

$$\boldsymbol{V(M) = \frac{2q\,a\,cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\,cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

الحقل الكهربائي:

في المستوي القطبي شعاع الحقل الكهربائي يكتب $\vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta$ وتدرج الكمون $\overrightarrow{grad}V(r,\theta) = \frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$. من القانون العام $\vec{E}(M) =$ $-\overrightarrow{grad}V(M)$ نستنتج أن:

$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ و $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ وفي النهاية نكتب:

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{2p\cos\theta}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 r^3}}\vec{\boldsymbol{u}}_r + \frac{\boldsymbol{p\sin\theta}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 r^3}}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$$

أو:

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 r^3}}(\boldsymbol{2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta})$$

خطوط الحقل والسطوح المتساوية الكمون:

خطوط الحقل: معادلة خطوط الحقل هي: $\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta}$. أي: $\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$

ولما نكامل نجد: $\ln r = 2\ln|\sin\theta| + C$ ، أي: $\boldsymbol{r = K\sin\theta^2}$.

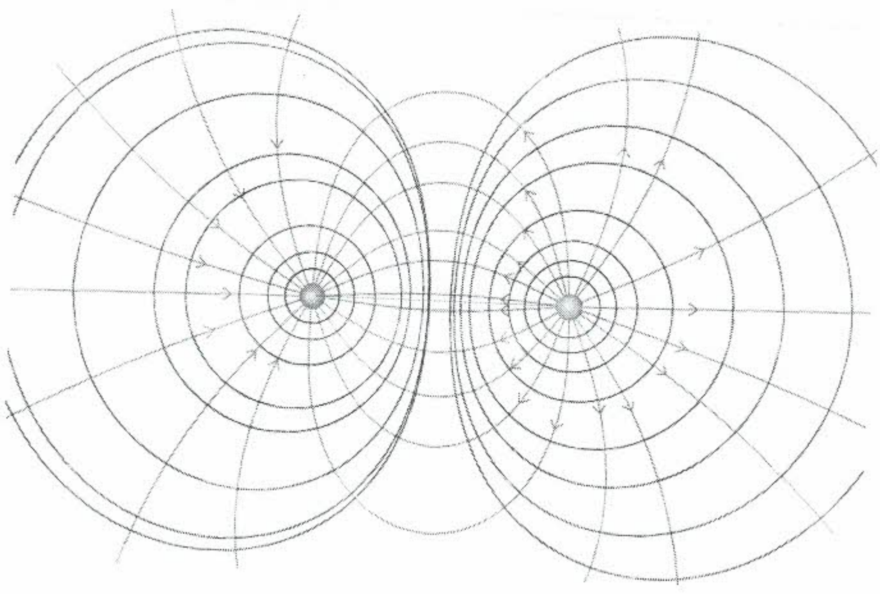
السطوح المتساوية الكمون: محددة بالعلاقة: $V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V_0$.

معادلة السطوح المتساوية الكمون هي إذن: $\boldsymbol{r^2 = K'\cos\theta}$ مع: $K' = \frac{p}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 V_0}}$.

تمرين: 1- ما هي عناصر التناظر لثنائي القطب الكهربائي؟

2- تأكد أن نتائج الحسابات التي تحصلنا عليها منسجمة مع خواص التناظر لثنائي القطب لما: $r = r_0$ و $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

3- الشكل التالي يعطي منحنيات خطوط الحقل في المستوي (A, B, M) ومنحنيات تقاطع السطوح المتساوية الكمون مع هذا المستوي، تأمل الشكل وتأكد أنه يحقق كل عناصر التناظر لثنائي القطب والقوانين التي تحكم خطوط الحقل والسطوح المتساوية الكمون.



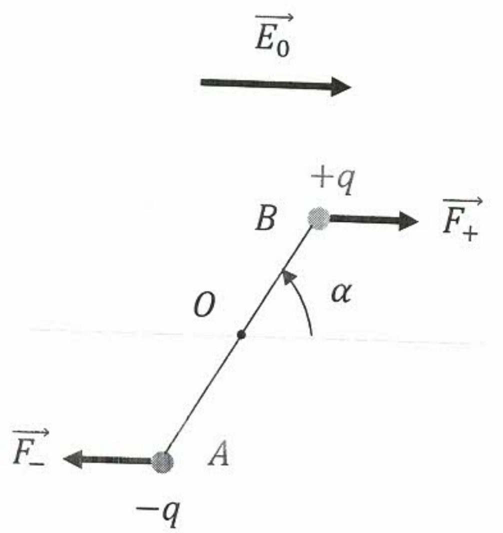
خطوط الحقل والسطوح المتساوية الكمون لثنائي القطب الكهربائي في المستوي

$+q$

$-q$

- **ثنائي قطب كهربائي داخل حقل كهربائي خارجي منتظم:**

نعتبر ثنائي قطب كهربائي داخل فضاء يوجد فيه حقل كهربائي منتظم $\overrightarrow{E_0}$.



$$\overrightarrow{F_+} = q\,\overrightarrow{E_0}$$

$$\overrightarrow{F_-} = -q\,\overrightarrow{E_0}$$

ثنائي القطب يوجد تحت تأثير مزدوجة قوتين لهما نفس الشدة. تتميز هذه المزدوجة بالعزم:

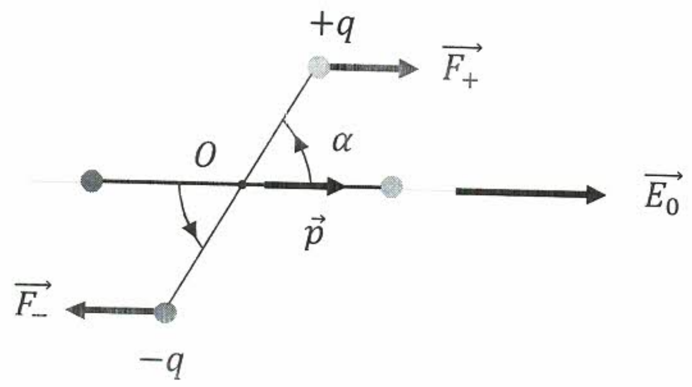
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_-} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_+} = -\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_+} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_+} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \wedge \overrightarrow{F_+}$$
$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_+} = q\,\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{E_0} = \vec{p} \wedge \overrightarrow{E_0}$$

يكون ثنائي القطب الكهربائي في حالة توازن لما:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \vec{p} \wedge \overrightarrow{E_0} = \vec{0}$$

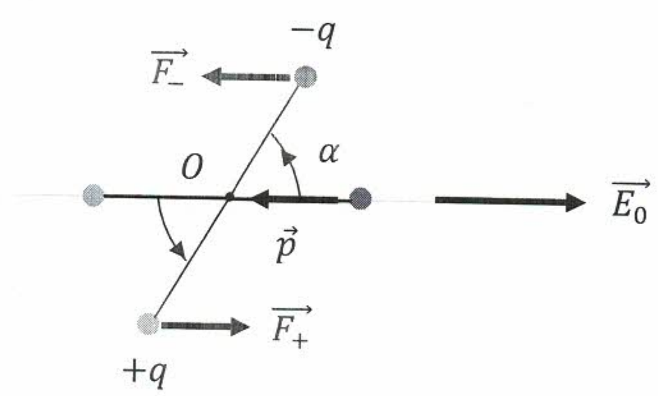
أي: $\vec{p} \parallel \overrightarrow{E_0}$ ويتحقق ذلك لما: $\alpha = 0$ أو $\alpha = \pi$.

- $\alpha = 0$: $\vec{p}$ و $\overrightarrow{E_0}$ يكونان في نفس الاتجاه ونحصل على توازن مستقر.
- $\alpha = \pi$: $\vec{p}$ و $\overrightarrow{E_0}$ يكونان متعاكسين في الاتجاه ونحصل على توازن غير مستقر.



$\vec{p}$ و $\overrightarrow{E_0}$ في نفس الاتجاه:

عند إزاحة ثنائي القطب عن التوازن القوة تعمل على إرجاعه إلى حالة التوازن

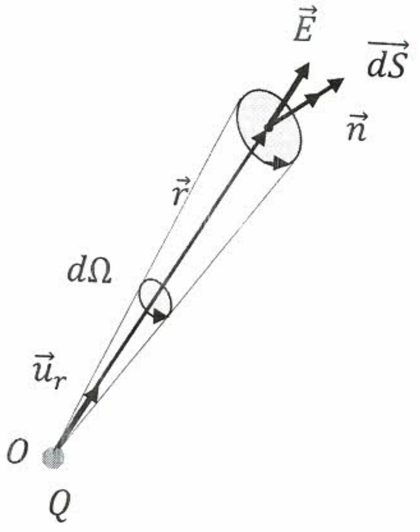


$\vec{p}$ و $\overrightarrow{E_0}$ في الاتجاه المعاكس:

عند إزاحة ثنائي القطب عن التوازن القوة لا ترجعه إلى الحالة الابتدائية ولكن تدفعه إلى حالة التوازن المستقر

11- نظرية غوس (Gauss):

نعتبر شحنة نقطية Q توجد في نقطة O من الفضاء. تدفق الحقل الكهربائي الناتج عن هذه الشحنة عبر مساحة عنصرية موجهة $\overrightarrow{dS}$ يكتب: $d\phi = \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$ ، حيث $\vec{n}$ هو شعاع الواحدة العمودي على dS والموجه كما هو في الشكل عند الدوران في الاتجاه الموجب على المساحة العنصرية dS .



عندما تكون Q موجبة ($Q > 0$) ، فإن $\vec{E}$ و $\vec{n}$ يكون لهما نفس الاتجاه ونحصل على تدفق موجب.

عندما تكون Q سالبة ($Q < 0$) ، فإن $\vec{E}$ و $\vec{n}$ يكونان في الاتجاه المعاكس ونحصل على تدفق سالب.

وباستعمال عبارة الحقل الكهربائي للشحنة Q على المساحة dS يمكن أن نكتب التدفق العنصري $d\phi$:

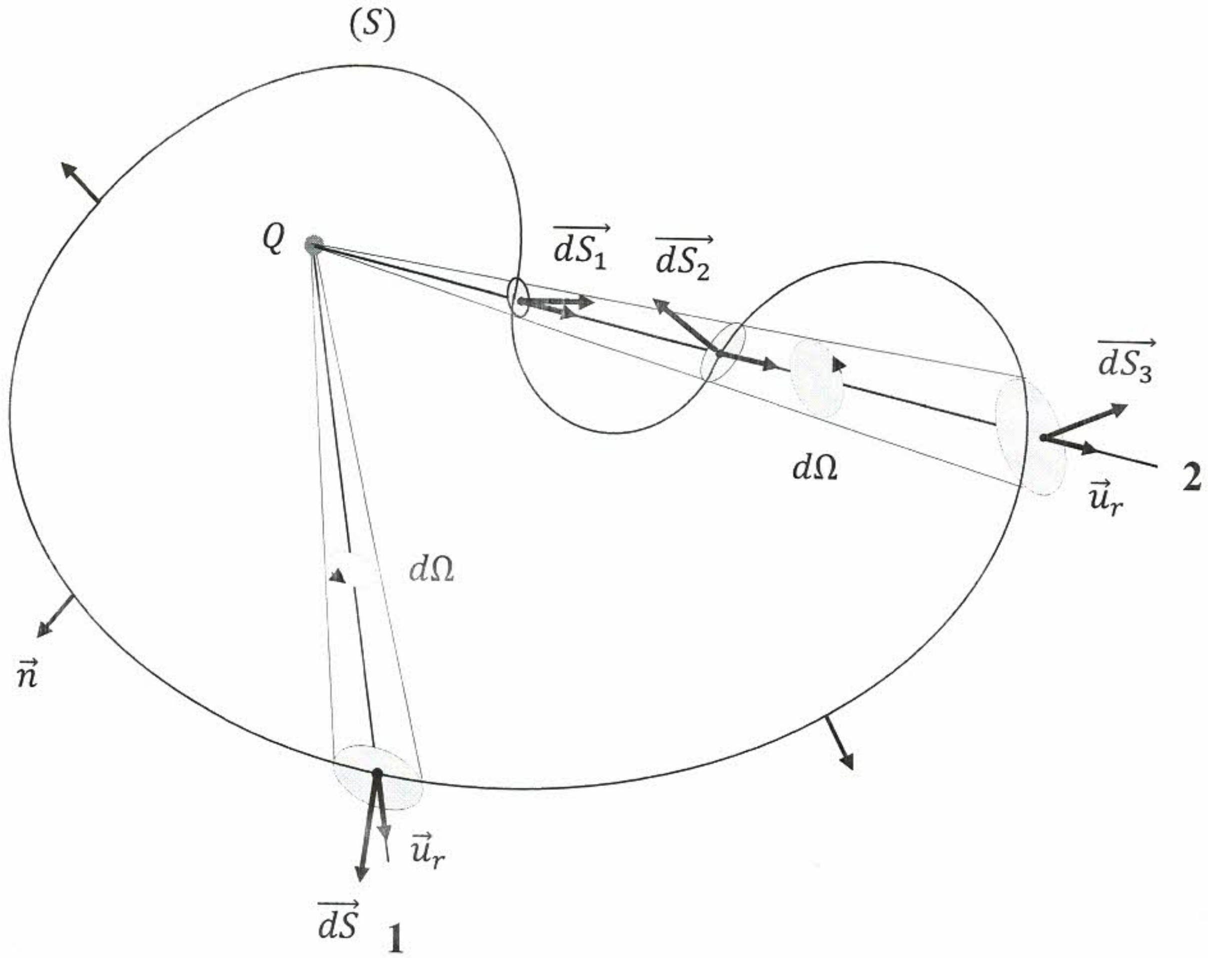
$$d\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}_r}{r^2}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}_r\cdot\vec{n}\cdot dS}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega$$

حيث: $\vec{u}_r$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{r}$ الرابط بين Q والمساحة العنصرية dS و $d\Omega$ هي الزاوية المجسمة التي نرى من خلالها dS انطلاقا من O. العلاقة السابقة تعني أن تدفق الحقل $\vec{E}$ يتعلق مباشرة بالزاوية المجسمة التي نرى من خلالها dS .

لنرى الآن ماذا يحدث لما نهتم بالتدفق الكلي للحقل $\vec{E}$ عبر مساحة كيفية مغلقة (S) . من أجل ذلك نأخذ الحالة التي يبينها الشكل الآتي. نعتبر شحنة Q توجد داخل سطح مغلق كيفي (S) (يحيط بحجم V). نذكر أن السطح المغلق يكون دائما موجه بشعاع واحدة $\vec{n}$ اتجاهه نحو الخارج. عندما نتتبع تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر السطح في الاتجاهين **1** و **2** فإننا نحصل على النتائج التالية:

- في الاتجاه **1**: الحقل $\vec{E}$ يخترق السطح (S) مرة واحدة والتدفق عبر المساحة العنصرية التي تحيط بنقطة الاختراق هو مباشرة مما سبق: $d\phi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega$.



- في الاتجاه **2**: الحقل $\vec{E}$ يخترق السطح (S) ثلاث مرات. اتجاه المساحات العنصرية حول نقاط الاختراق ليس دائما في نفس الجهة مع $\vec{E}$ والتدفق الكلي هو:

$$d\phi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_1\, dS_1}{{r_1}^2} + \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_2\, dS_2}{{r_2}^2} + \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_3\, dS_3}{{r_3}^2}\right]$$

أو:

$$d\phi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[d\Omega - d\Omega + d\Omega] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

$\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_2\, dS_2}{{r_2}^2} = -d\Omega$ لأن $\vec{u}_r$ و $\vec{n}_2$ لا يوجدان في نفس الجهة بالنسبة للمساحة dS_2.

تدفق الحقل الكهربائي للشحنة Q عبر السطح (S) هو نفسه في الاتجاهين **1** و **2** .

العلاقة: $d\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ d\Omega$ هي نتيجة عامة لأن أي خط ينطلق من الشحنة Q عندما تكون داخل السطح (S) يخترق السطح عدد فردي من المرات.

عندما تكون Q خارج السطح، فإن أي خط ينطلق من الشحنة يخترق السطح (S) بعدد زوجي من المرات ونحصل لذلك على: $d\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[-d\Omega + d\Omega - d\Omega + d\Omega \dots] = 0$.

وبما أن (S) سطح مغلق فإن: $\iint_{(S)} d\Omega = 4\pi$ لأنه يمثل الزاوية المجسمة التي نرى من خلالها كل الفضاء انطلاقا من الشحنة Q . ونحصل في النهاية على تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر كل السطح (S) :

$$\phi(\vec{E}) = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

وباعتبار قانون التطابق في حساب الحقل الكهربائي، يمكن تعميم هذه النتيجة على توزيع شحني كيفي ونحصل على نظرية "غوس" التي نصها هو ما يلي:

« تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق في الفراغ يساوي $1/\varepsilon_0$ × الشحنة الكهربائية الكلية Q_{int} التي توجد داخل السطح المغلق ».

نعبر عن نظرية غوس بالعلاقة:

$$\oiint_{(S)} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

<u>تطبيق نظرية غوس في حساب الحقل الكهربائي:</u>

حساب الحقل الكهربائي باستعمال نظرية غوس هو على العموم ممكن فقط في حالة التوزيعات الشحنية ذات "**التناظر العالي** ". في مثل هذه الحالات، تمثل نظرية غوس أداة حساب سهلة وسريعة للحقل الكهربائي. فهي تختصر عملية الوصول إلى الحل بشكل كبير وتجنبنا مشقة وعناء الحسابات المعقدة التي نواجهها عند استعمال الطريقة المباشرة. تطبيق نظرية غوس يتطلب تحديد خواص شعاع الحقل (الاتجاه والشدة) انطلاقا من عناصر التناظر للتوزيع الشحني ثم اختيار سطح مغلق (**سطح غوس**) يتوافق شكله مع تناظر التوزيع ويسمح حساب تدفق الحقل عبر هذا السطح من الحصول على شدة الحقل بكيفية سهلة. الخطوات المتبعة لتحقيق ذلك هي:

1- اعتبار التناظر: انطلاقا من عناصر التناظر للتوزيع الشحني، يجب أن نحصل على العبارة العامة لشعاع الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في جملة الإحداثيات التي اخترناها لحساب الحقل بناء على تناظر المشكلة . نستعمل من أجل ذلك:

- مستويات التناظر ومستويات عكس التناظر و**محاور التناظر** لتحديد اتجاه شعاع الحقل.
- الاتغير بالدوران أو الانسحاب لتقليص تعلق الحقل بعدد الإحداثيات إلى أقل من ثلاثة.

2- اختيار سطح غوس (S_G): سطح غوس هو سطح تخيلي يتم تصوره بناء على شكل العبارة العامة لشعاع الحقل التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة. كيفية اختيار شكل سطح غوس هي بحيث يكون حساب التدفق $\oiint_{(S_G)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$ أبسط وأسهل ما يمكن. سطح غوس (S_G) يجب أن يكون **مغلقا** ويمر من النقطة M التي نريد حساب الحقل $\vec{E}$ عندها. **يجب أن نختار سطح غوس بحيث يكون** $\vec{E}$ **عموديا عليه أو موازيا له.** في المناطق التي يكون فيها $\vec{E}$ عموديا على (S_G) يجب أن تكون شدته ثابتة. عندما يكون $\vec{E}$ عموديا على (S_G) في مناطق وموازيا له في أخرى، نستطيع أن نكتب: $S_G = S_\perp + S_\parallel$ حيث S_G هي مساحة سطح غوس المغلق و $S_\perp$ هي مساحة الجزء من سطح غوس أين يكون $\vec{E}$ عموديا عليه و $S_\parallel$ مساحة الجزء التي يكون فيها $\vec{E}$ موازيا له. تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر سطح غوس (S_G) يكتب:

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_\perp} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_\parallel} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

لدينا: $\iint_{S_\parallel} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$ لأن $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$ على $S_\parallel$

و: $\iint_{S_\perp} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_\perp} E\, dS = E \iint_{S_\perp} dS = E\, S_\perp$ لأن $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS}$ و $\|\vec{E}\| = E =$ ثابت على $S_\perp$.

3- تطبيق نظرية غوس على السطح المختار (S_G): من المعادلات السابقة نحصل في النهاية على:

$$\oiint_{(S_G)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E\, S_\perp = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

أي:

$$E(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0\, S_\perp}$$

ولهذا يجب اختيار سطح غوس (S_G) بحيث M تنتمي إلى الجزء $S_\perp$.

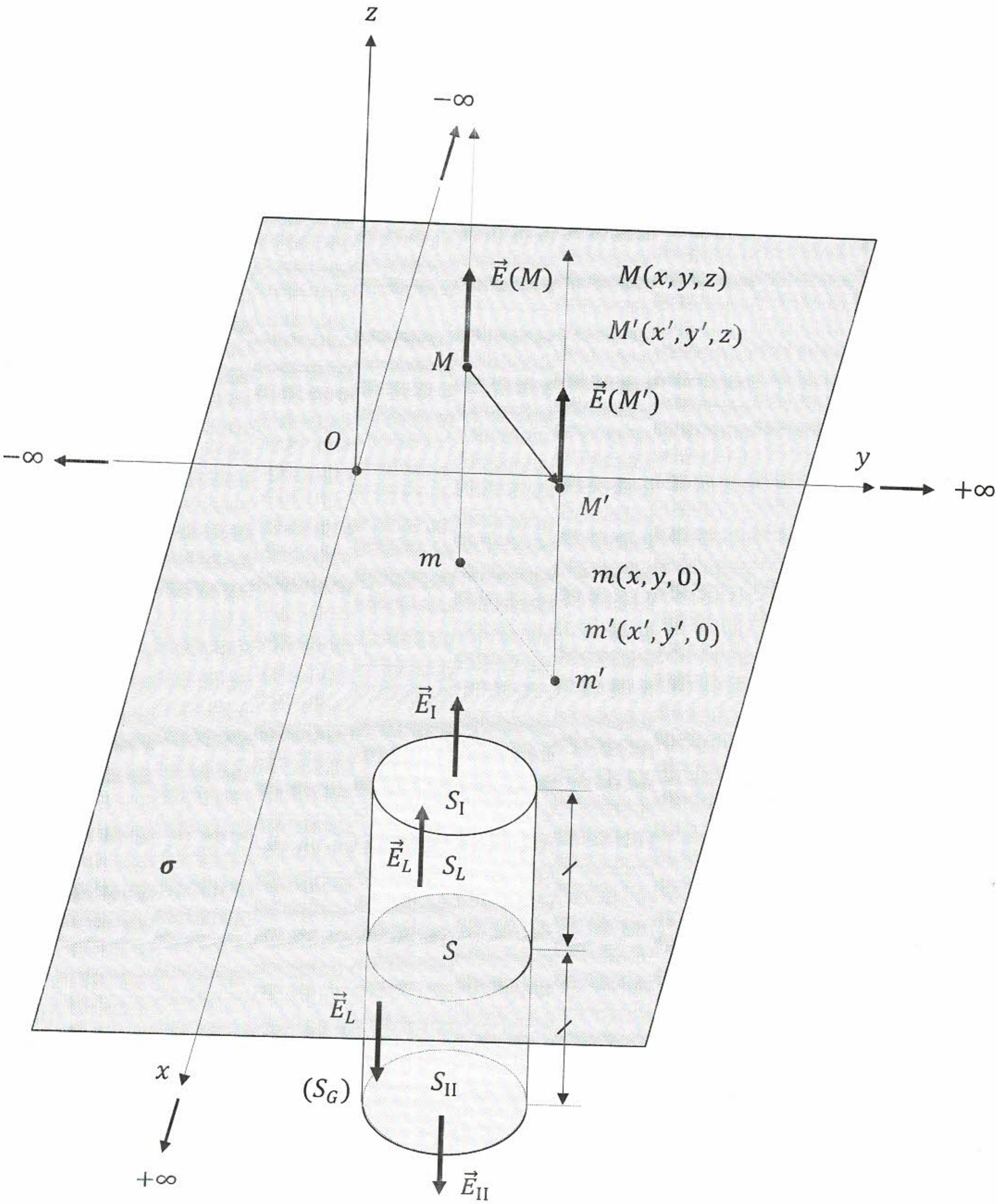
يمكن أن نطبق نظرية غوس لحساب الحقل الكهربائي في حالة التوزيعات الشحنية المشهورة التالية:

- **التوزيع الخطي:** سلك مستقيم لا منتهي يحمل كثافة شحنية خطية منتظمة λ .
- **التوزيع السطحي:** سطح مستوي لا منتهي ، سطح أسطوانة طولها لا منتهي ، سطح كرة . في جميع الحالات السطح يحمل كثافة شحنية سطحية منتظمة σ .
- **التوزيع الحجمي:** أسطوانة طولها لا منتهي ممتلئة أو مجوفة (يوجد فراغ داخلها) ، كرة ممتلئة أو مجوفة. في جميع الحالات الحجم المشحون يحمل كثافة شحنية حجمية منتظمة ρ أو قطرية (*radiale*) $\rho(r)$ بدلالة الإحداثية الأسطوانية أو الكروية r .

عند وجود توزيع سطحي وحجمي معا ومن نفس الشكل (نفس التناظر) نستعمل فقط قانون التطابق للحصول على الحقل الكهربائي.

تطبيق 1: سطح مستوي لا منتهي يحمل كثافة شحنية سطحية منتظمة σ .

يمثل هذا التوزيع واحدة من الحالات التي يمكن أن نطبق فيها نظرية غوس لحساب الحقل الكهربائي. لنرى كيف يتم ذاك؟ أول شيء ننظر فيه هو شكل التوزيع الشحني لكي نستنتج من ذلك عناصر التناظر للتوزيع ونختار جملة الإحداثيات الملائمة لكتابة عبارة شعاع الحقل. المستوي الامنتهي يمكن تمثيله بمربع طول ضلعه $a = \infty$ أو بدائرة نصف قطرها $R = \infty$. في حالة المربع، نأخذ المستوي المشحون هو المستوي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ لجملة الإحداثيات الديكارتية $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ وفي حالة الدائرة، هو المستوي القطبي في جملة الإحداثيات الأسطوانية $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. المحور $\overrightarrow{Oz}$ هو نفسه في الحالتين. حساب الحقل الكهربائي في كلي الجملتين هو سواء. عناصر التناظر للمستوي الامنتهي هي:



z
$-\infty$
$\vec{E}(M)$
$M(x,y,z)$
$M'(x',y',z)$
M
$\vec{E}(M')$
O
$-\infty$
y
$+\infty$
M'
m
$m(x,y,0)$
$m'(x',y',0)$
m'
$\vec{E}_{\mathrm{I}}$
S_{I}
$\vec{E}_L$
S_L
σ
S
$\vec{E}_L$
x
(S_G)
S_{II}
$+\infty$
$\vec{E}_{\mathrm{II}}$

- مستوي تناظر (مرآة): يمثله المستوي المشحون أي المستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$. هذا المستوي يقسم الفضاء إلى نصفين متناظرين. كل الخواص الكهربائية في الجهة التي يكون فيها z موجب هي مناظرة لنفس الخواص التي توجد في الجهة المقابلة لما z سالب. ونتيجة لذلك، فإن شعاعي الحقل الكهربائي في نقطتين متناظرتين بالنسبة لهذا المستوي يكونان متعاكسين.
- لا تغير بالانسحاب: أي انسحاب مواز للمستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$ من نقطة $M(x,y,z)$ إلى نقطة $M'(x',y',z)$ يحافظ على شكل التوزيع الشحني ونقول أن النقطتين تشاهدان نفس التوزيع الشحني. النتيجة المباشرة لهذا التناظر هي العلاقة: $\vec{E}(M)=\vec{E}(M')$.

أي: $\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x',y',z)$ وهذا ممكن فقط لما يكون الحقل الكهربائي لا تعلق إلا بالإحداثية z ونكتب إذن: $\vec{E}(M)=\vec{E}(M')=\vec{E}(z)$.

- محور تناظر: لو كان المستوي المشحون عبارة عن مربع محدود المساحة أو دائرة محدودة المساحة، فإنه يملك محور تناظر واحد يمر من مركز المربع أو الدائرة. المستوي اللامنتهي ليس له مركز تناظر معين، بل أي نقطة تنتمي إليه يمكن أن تكون مركز تناظر ولذلك، فكل محور مواز للمحور $\overrightarrow{Oz}$ هو محور تناظر. إذن، كل نقطة M من الفضاء تنتمي إلى محور تناظر والحقل الكهربائي في هذه النقطة يجب أن يكون محمولا بمحور التناظر أي مواز للمحور $\overrightarrow{Oz}$. ولهذا، فإن الصيغة العامة للحقل الكهربائي الناتج عن مستوي لا منتهي مشحون بصفة منتظمة وفي أي نقطة من الفضاء هي: $\boldsymbol{\vec{E}(M)=E(z)\,\vec{k}}$. **العدد اللامنتهي** من محاور التناظر ومن الانسحاب الموازي للمستوي المشحون يمثل " **التناظر العالي** " (*haute symétrie*) الذي جعل الحقل الكهربائي يكتب بهذه الصيغة البسيطة القابلة لتوظيف نظرية غوس في حساب الحقل الكهربائي لهذا التوزيع الشحني.

بقي لنا فقط أن نهتدي لاختيار سطح غوس الذي يحقق الشروط التي رأيناها سابقا والتي تجعل حساب تدفق الحقل عبره بسيطا. سطح غوس (S_G) المناسب هنا هو سطح أسطوانة (أو سطح متوازي مستطيلات) محورها موازي للمحور $\overrightarrow{Oz}$ وتقطع المستوي المشحون من منتصفها كما هو موضح في الشكل. القاعدتان S_I و S_{II} للأسطوانة توجدان على نفس المسافة z من المستوي المشحون. الحقل الكهربائي على S_I يكتب $\vec{E}_I=E(z)\,\vec{k}$ وهو مناظر للحقل على S_{II}. ولذلك فإن $\vec{E}_{II}=\vec{E}(-z)=-E(z)\,\vec{k}$. الحقل الكهربائي $\vec{E}_L$ على المساحة الجانبية للأسطوانة S_L موازي لها وهذا يجعل تدفق الحقل عبر S_L معدوما. في النهاية، نظرية غوس تكتب كما يلي:

$$\oiint_{(S_G)} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{S_I} \vec{E}_I\cdot\overrightarrow{dS} + \iint_{S_{II}} \vec{E}_{II}\cdot\overrightarrow{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}_L\cdot\overrightarrow{dS}$$

على S_I : $\vec{E}_I \parallel \overrightarrow{dS}$ ، $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{k}$ ، $\vec{E}_I = E(z)\,\vec{k}$ ، $\vec{E}_I\cdot\overrightarrow{dS} = E(z)\,dS$

على S_{II} : $\vec{E}_{II} \parallel \overrightarrow{dS}$ ، $\overrightarrow{dS} = -dS\,\vec{k}$ ، $\vec{E}_{II} = -E(z)\,\vec{k}$ ، $\vec{E}_{II}\cdot\overrightarrow{dS} = E(z)\,dS$

على S_L : $\vec{E}_L \perp \overrightarrow{dS}$ ، $\vec{E}_L\cdot\overrightarrow{dS} = 0$.

على S_I و S_{II} : الإحداثية z ثابتة $\Longleftarrow$ $E(z) =$ ثابت .

لدينا أيضا: $S_I = S_{II} = S$ حيث S هي مساحة تقاطع الأسطوانة مع المستوي المشحون.

ومن كل ما سبق نحصل على: $\oiint_{(S_G)} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = E(z)S_I + E(z)S_{II} = 2E(z)S = Q_{int}/\varepsilon_0$

الشحنة داخل سطح غوس هي فقط التي توجد على S أي: $Q_{\text{int}} = \sigma\, S$ ونحصل في النهاية على:

$$\boldsymbol{E(z) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}}$$

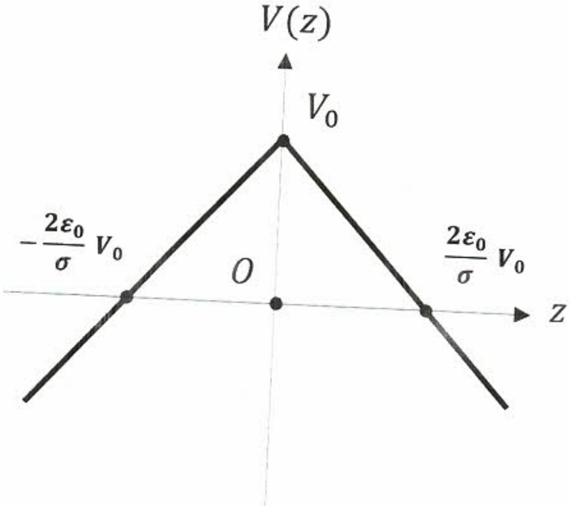
شعاع الحقل الكهربائي الناتج عن مستوي لا منتهي يملك كثافة شحنية منتظمة $\boldsymbol{\sigma}$ في أي نقطة من الفضاء هو:

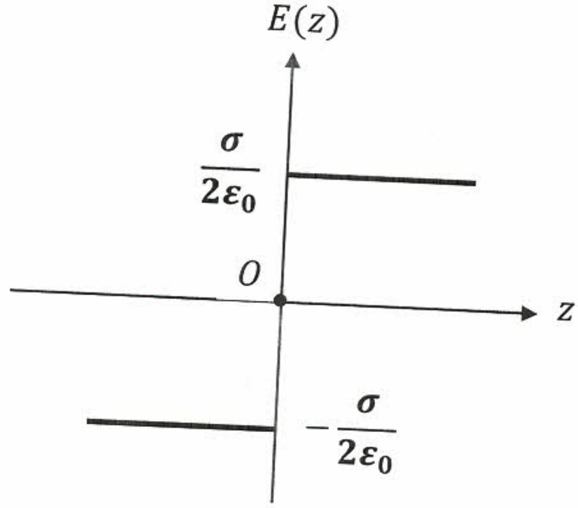
$$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \pm\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{k}} \begin{cases} +: z > 0 \\ -: z < 0 \end{cases}$$

وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها من الحسابات المباشرة في التطبيق على القرص.

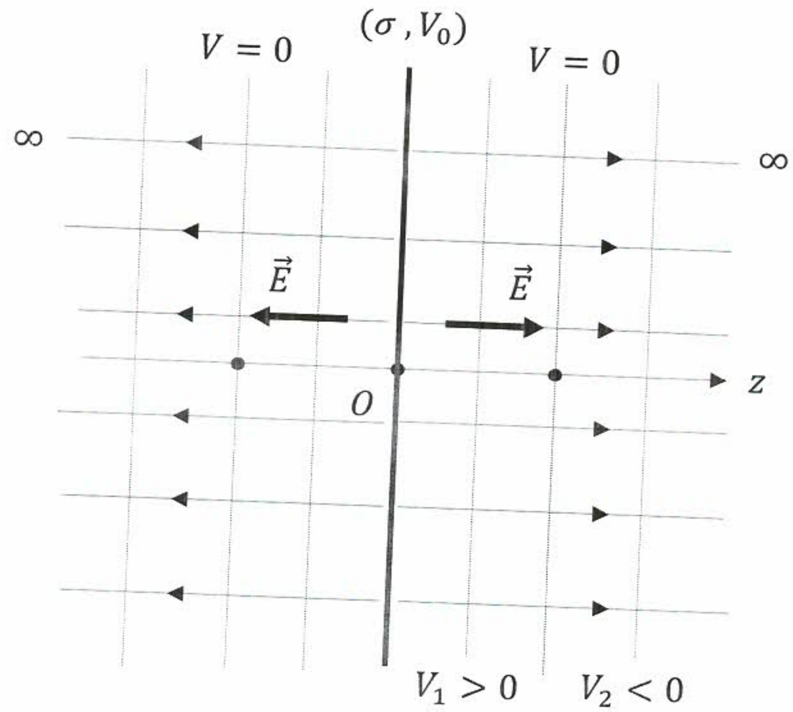
الكمون الكهربائي نحصل عليه من العلاقة العامة : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ التي تكتب في هذه الحالة من الشكل: $\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$ الذي يستلزم أن : $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ و $\frac{\partial V}{\partial z} = \mp\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \begin{cases} -: z > 0 \\ +: z < 0 \end{cases}$. هذه العلاقات الثلاثة تعني أن الكمون يتعلق بالمتغيرة z فقط حسب القانون: $\frac{dV}{dz} = \mp\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \begin{cases} -: z > 0 \\ +: z < 0 \end{cases}$ أي: $dV = \mp\frac{\sigma\, dz}{2\varepsilon_0} \begin{cases} -: z > 0 \\ +: z < 0 \end{cases}$ وبعدما نكامل نحصل على: $V(z) = \mp\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + C \begin{cases} -: z > 0 \\ +: z < 0 \end{cases}$. ثابت الكمون C لا يحدد هنا باعتبار مبدأ الكمون في ما لا نهاية لأن الشحنة الكهربائية تمتد إلى ما لا نهاية. في هذه الحالة نفضل أن نستنتج الثابت C بالنسبة

لكمون السطح المشحون الذي نعتبره يساوي V_0 . إذن لما $z=0$ لدينا: $V(0)=V_0=C$ وهكذا نجد: $\begin{cases} -: \mathbf{z}>0 \\ +: \mathbf{z}<0 \end{cases}$ $\mathbf{V(z)} = \mp \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{z}}{2\boldsymbol{\varepsilon}_0} + \mathbf{V_0}$. تغير $E(z)$ و $V(z)$ بدلالة z بعد النقطة M عن المستوي المشحون ممثلان بالمنحنيين التاليين.





خطوط الحقل والسطوح المتساوية الكمون ممثلة في الشكل التالي



تمارين خادمة: عمق استيعابك للمشكلة بالإجابة على ما يلي.

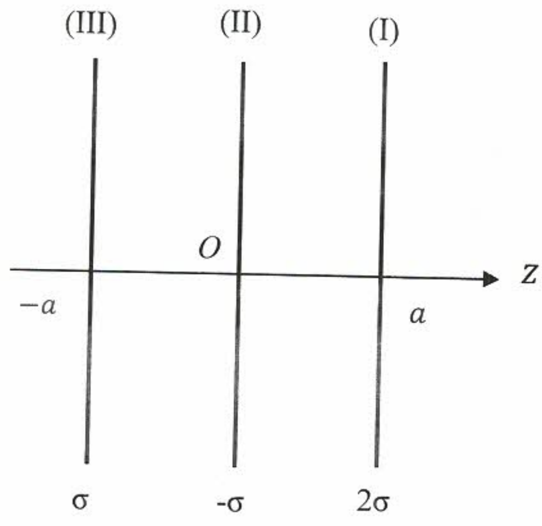
تمرين 1: التطبيق السابق يتناول المسألة لما يكون السطح يحمل شحنة موجبة ($\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{0}$). كيف تصير النتائج التي تحصلنا عندما يكون السطح يحمل شحنة سالبة ($-\boldsymbol{\sigma} < 0$). أعد تمثيل كل الأشكال والمنحنيات.

تمرين 2 (من امتحان 2017): نعتبر ثلاث مستويات (I) و (II) و (III) لا متناهية ومتوازية وعمودية على المحور Oz. المستوي (I) يوجد عند $z = a$ ويحمل كثافة شحنية موجبة $\mathbf{2\sigma}$ والمستوي (II) يوجد عند $z = 0$ ويحمل كثافة شحنية سالبة $\boldsymbol{\sigma}$- والمستوي (III) يوجد عند $z = -a$ ويحمل كثافة شحنية σ.

أ- احسب الحقل الكهربائي الناتج عن مجموع هذه التوزيعات الشحنية في كل مناطق الفضاء ثم ارسم منحنى الحقل $E(z)$.

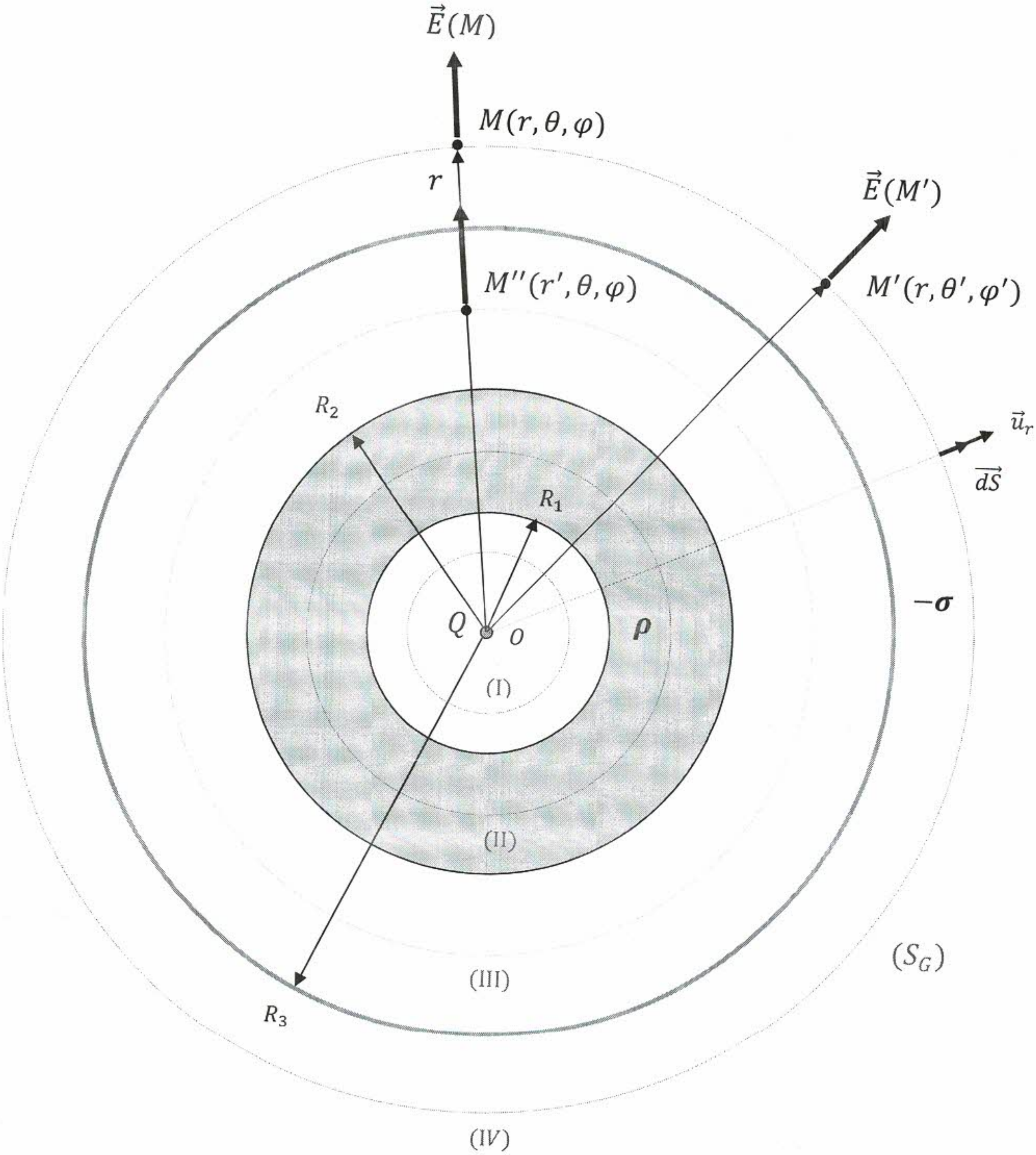
ب- استنتج الكمون الكهربائي في كل مناطق الفضاء. نأخذ كمون المستوي (II) الذي يقطع $\overrightarrow{Oz}$ في O يساوي V_0.

ت- ارسم منحى الكمون $V(z)$ لما : $V_0 = -10\,V$ و $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot a = 5\,V$.



تطبيق 2 (توزيع شحني له تناظر كروي): ليكن التوزيع الشحني التالي:

شحنة نقطية Q تقع في المركز O لكرة مجوفة تحمل كثافة شحنية حجمية منتظمة $\boldsymbol{\rho}$ موجبة نصف قطرها الداخلي R_1 والخارجي R_2 ، يحيط بها سطح كروي له نفس المركز، نصف قطره R_3 ويحمل كثافة شحنية منتظمة $-\sigma$ سالبة. اوجد عبارات الحقل والكمون في كل مناطق الفضاء.



تنبيه: في التطبيق السابق قدمنا حلا مفصلا من أجل الاستيعاب الجيد لكيفية تطبيق نظرية غوس. كان يكفي أن نشير فقط إلى التناظر الذي نستنتج منه العبارة العامة لشعاع الحقل الكهربائي ثم نختار على ضوء ذلك شكل سطح غوس المناسب لحل المشكلة وهو ما سنحاول فعله في هذا التطبيق.

التناظر الكروي لهذا التوزيع الشحني يؤدي إلى كتابة العبارة العامة لشعاع الحقل الكهربائي في جملة الإحداثيات الكروية $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ وفي أي نقطة $M(r,\theta,\varphi)$ من الفضاء من الشكل $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$. إذا أردنا أن نفصل أكثر (غير ضروري) يمكن أن نشرح لماذا ونقول مثلا أن الأسباب التي جعلت الحقل يكتب وفق العبارة السابقة يوضحها الشكل أعلاه وهي:

- النقطتان $M(r,\theta,\varphi)$ و $M'(r,\theta',\varphi')$ تشاهدان نفس التوزيع الشحني وهذا يعني أن $\vec{E}(M) = \vec{E}(M')$ أي $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = \vec{E}(r,\theta',\varphi')$ وهو غير ممكن إلا إذا كان الحقل يتعلق بالإحداثية r فقط أو $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.
- كل مستقيم يمر من المركز O هو محور تناظر للتوزيع الشحني (أي دوران حول المستقيم لا يغير من شكل التوزيع الشحني) وهذا يعني أن الحقل $\vec{E}(M)$ والشعاع $\overrightarrow{OM}$ لهما نفس الحامل أي $\vec{E}(M)$ في الاتجاه $\vec{u}_r$ أو $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$ لأن $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$.

كل هذه الأسباب يلخصها التناظر الكروي للتوزيع الشحني. التناظر العالي في هذه الحالة يمثله العدد الغير منتهي من محاور التناظر وأيضا من مستويات التناظر التي تقسم الكرة إلى نصفين متماثلين.

سطح غوس (S_G) المناسب لحساب الحقل الكهربائي في هذه الحالة هو سطح كروي مركزه O ونصف قطره r . في كل نقطة M من (S_G) الحقل يكتب $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$ وهذا يعني أن $E(r)$ ثابت على (S_G) . شعاع المساحة العنصرية على (S_G) يكتب $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}_r$ لأن الاتجاه العمودي على سطح الكرة هو اتجاه $\overrightarrow{OM}$. نظرية غوس تكتب إذن:

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \oiint_{S_G} E(r)\,\vec{u}_r\,dS\,\vec{u}_r = \oiint_{S_G} E(r)\;dS = E(r)\oiint_{S_G} dS = E(r)\,S_G = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

إذن: $E(r) = {Q_{int}}/{\varepsilon_0\,S_G}$ أي : $\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r}$ لأن : $S_G = 4\pi r^2$.

بقي فقط ، لتحديد عبارات شعاع الحقل الكهربائي في كل مناطق الفضاء ، أن نعطي الشحنة Q_{int} داخل سطح غوس في كل منطقة. في التوزيع الشحني قيد الدراسة توجد أربعة مناطق مختلفة معينة بالرموز (I) و (II) و (III) و (IV) .

▪ المنطقة (I) حيث $0 < r < R_1$: $Q_{int} = Q$ و $\overrightarrow{E_{\mathrm{I}}}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$.

▪ المنطقة (II) حيث $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = Q + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)\rho$ ونحصل بعد التعويض على : $\overrightarrow{E_{\mathrm{II}}}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{\rho}{3}\,r - \frac{1}{3}\,\frac{\rho\,R_1^3}{r^2}\right)\vec{u}_r$.

▪ المنطقة (III) حيث $R_2 < r < R_3$: $Q_{int} = Q + \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)\rho$ ونحصل بعد التعويض على : $\overrightarrow{E_{\mathrm{III}}}(r) = \left[\frac{Q}{4\pi} + \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho\right]\frac{1}{\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r$.

▪ المنطقة (IV) حيث $r > R_3$: $Q_{int} = Q + \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)\rho - 4\pi R_3^2\sigma$ ونحصل بعد التعويض على : $\overrightarrow{E_{\mathrm{IV}}}(r) = \left[\frac{Q}{4\pi} + \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho - R_3^2\,\sigma\right]\frac{1}{\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r$.

لحساب الكمون الكهربائي نستعمل العلاقة العامة $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. في جملة الإحداثيات الكروية هذه العلاقة تكتب: $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta - \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$ ، وبما أن شعاع الحقل يملك في جميع المناطق مركبة في الاتجاه $\vec{u}_r$ فقط ، فهذا يعني أن $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ و $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ أي أن الكمون هو دالة للإحداثية r فقط ويكتب $V(r)$ والعلاقة العامة تصير إذن $E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ أو $dV = -E(r)dr$. ونحصل في النهاية على الكمون من التكامل $V(r) = -\int E(r)\,dr$. عبارات الكمون في مختلف مناطق الفضاء نحصل عليها باعتبار مبدأ الكمون في ما لا نهاية أي $V(\infty) = 0$. ولذلك نبدأ بحساب $V_{IV}(r)$ أولا ثم نستنتج العبارات المتبقية باستعمال خاصية **الاستمرارية لدالة الكمون**. يستحسن أن تتأكدوا من صحة النتائج التالية:

$$V_{\mathrm{IV}}(r) = \left[\frac{Q}{4\pi} + \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho - R_3^2\,\sigma\right]\frac{1}{\varepsilon_0\,r}$$

$$V_{\mathrm{III}}(r) = \left[\frac{Q}{4\pi} + \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho\right]\frac{1}{\varepsilon_0\,r} - \frac{\sigma\,R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_{\mathrm{II}}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi r} - \frac{\rho}{6}\,r^2 - \frac{1}{3}\frac{\rho\,R_1^3}{r} + \frac{\rho}{2}R_2^2 - \sigma\,R_3\right)$$

$$V_{\mathrm{I}}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{4\pi r} + \frac{\rho}{2}(R_2^2 - R_1^2) - \sigma\,R_3\right]$$

تمثيل منحنيات $E(r)$ و $V(r)$ بدلالة r ليس بسيطا في هذه الحالة ويتطلب مناقشة المشكلة وفق القيم التي تأخذها كل من Q و $\boldsymbol{\rho}$ و $\boldsymbol{\sigma}$ و $-\boldsymbol{\sigma}$ و R_1 و R_2 و R_3 .

تمارين خادمة:

تمرين 1: سطح كروي نصف قطره R يحمل كثافة شحنية سطحية منتظمة سالبة $-\boldsymbol{\sigma}$ وتوجد في مركزه O شحنة نقطية موجبة Q.

1- احسب الحقل والكمون الكهربائيين في كل مناطق الفضاء.

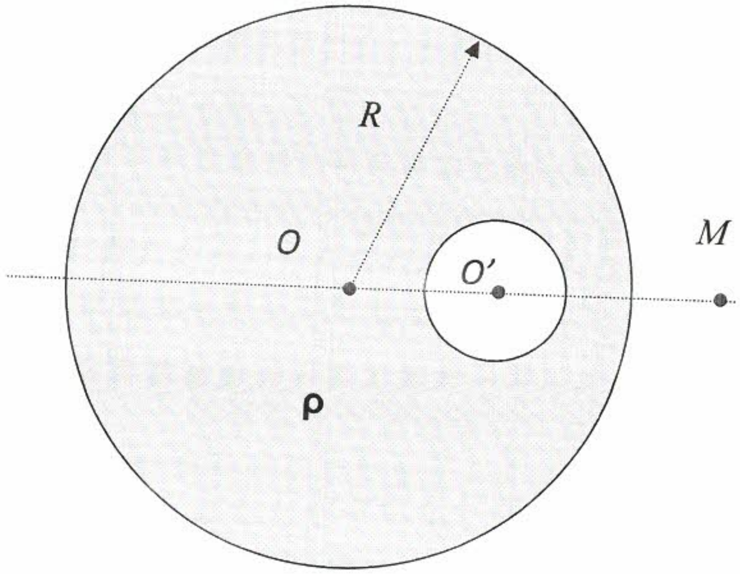
2- ارسم منحنى تغير الحقل ومنحنى تغير الكون في الفضاء.

3- مثل خطوط الحقل الكهربائي الناتجة عن هذا التوزيع الشحني. ناقش حسب قيم Q و $-\boldsymbol{\sigma}$.

تمرين 2: نعتبر كرة نصف قطرها R ومركزها O تحمل كثافة شحنية حجمية منتظمة وموجبة $\boldsymbol{\rho}$.

1- احسب شعاع الحقل الكهربائي عند نقطة M تقع خارج الكرة.

2- ننزع من الكرة السابقة حجما كرويا نصف قطره $R' = R/4$ ومركزه O' يقع على امتداد OM كما يبين الشكل مع : $OO' = R/2$. أحسب الحقل الكهربائي $\overrightarrow{E(M)}$.



أعمال موجهة

I- الشحنة النقطية وقانون كولون:

التمرين01: 1- أحسب الشحنة الكهربائية الموجبة والسالبة الموجودة في قطعة من النحاس تزن 100 غرام.

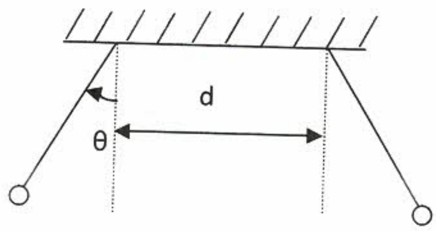
نعطي: ${}^{63.5}_{29}Cu$ ، $e = 1.602\ 10^{-19}\ C$. لو كان ممكنا فصل هذين الشحنتين عن بعضهما ووضعهما على مسافة d بينهما، أحسب هذه المسافة التي تجعل قوة التجاذب بين الشحنتين تساوي $10\ N$.

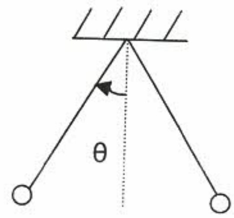
2- أحسب قوة التجاذب الكهربائي بين بروتون وإلكترون في ذرة الهيدروجين إذا افترضنا أن الإلكترون يصنع مسارا دائريا نصف قطره يساوي $0,53$ Å ثم قارنها مع قوة التجاذب الثقلي. ماذا تستنتج؟

نعطي: $M_p = 1,672\ 10^{-27}\ Kg$ و $m_e = 9,109\ 10^{-31}\ Kg$.

التمرين 2: 1- كرتان متشابهتان من الفلين كتلتيهما m وتحملان نفس الشحنة Q مربوطتان إلى خيطين لهما نفس الطول l وعلقتا في نقطة واحدة. أوجد الشحنة Q بدلالة الزاوية θ التي يصنعها الخيطان مع الشاقول في حالة التوازن.

2- نعلق الخيطين في نقطتين مختلفتين بينهما مسافة d. كيف يمكن استعمال هذه الجملة البسيطة من أجل التأكد عمليا من صحة تغير قانون كولون بدلالة عكس مربع المسافة بقياس الزاوية θ من أجل قيم مختلفة للمسافة d ؟





التمرين 3: شحنتان نقطيتان $+q$ و $-q$ تشكلان ثنائي قطب ، المسافة بينهما $d = 2a$.

1- ما هو العزم الكهربائي لهذا الثنائي ؟ ما هي عناصر التناظر لهذه الجملة ؟

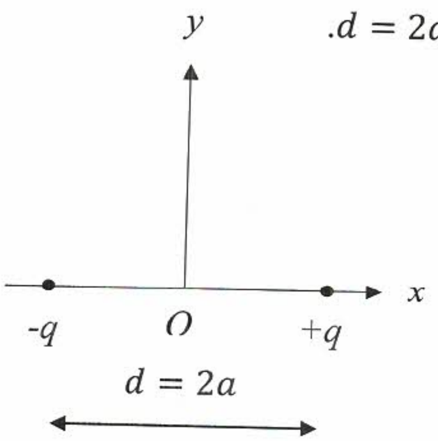
2- أحسب عبارة الحقل الكهربائي في نقطة كيفية $M(x, y)$

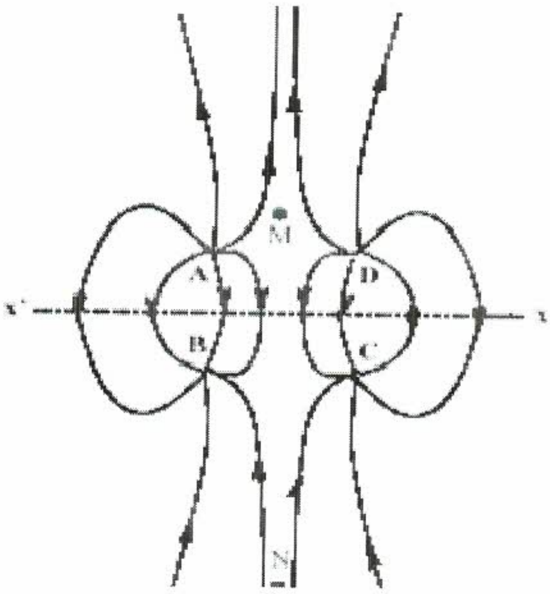
ثم استنتج قيمته في النقاط الأربع التالية:

$M_1(a, a)$, $M_2(-a, a)$, $M_3(-a, -a)$, $M_4(a, -a)$

3- أحسب الكمون الكهربائي عند نفس النقاط.

4- أرسم خطوط الحقل الكهربائي حول الشحنتين ثم حدد سطوح تساوي الكمون.





التمرين 4: أربعة شحنات نقطية موضوعة على رؤوس مستطيل $A; B; C; D$ ، تنشئ حقلا كهرساكنا خطوطه مبينة في الرسم .

1- ما هي إشارة الشحنات، كيف نبين أن الشحنات متساوية القيمة المطلقة.

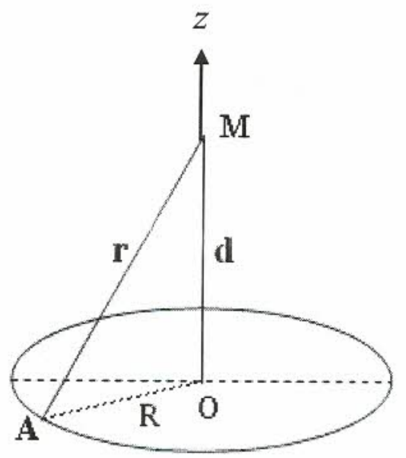
2- وتري المستطيل ليسا من خطوط الحقل، لماذا ؟

3- كيف يتغير الكمون على المحور $x'Ox$.

4- ما هي إشارة الكمون في كل من النقطتين M و N.

5- هل توجد نقاط يكون فيها الكمون لامنته.

II- التوزيعات الشحنية المستمرة



التمرين 5: - أحسب الحقل و الكمون الكهرساكنين الناتجين عن سلك نصف دائري نصف قطره R ومشحون بكثافة خطية منتظمة و موجبة λ عند مركزه O . أستنتج قيمة الحقل في حالة حلقة دائرية .

- أحسب الحقل والكمون الناشئين عن حلقة دائرية عند نقطة M تقع على محورها و تبعد عن O بالمسافة z، أرسم الدالة $E(z)$.

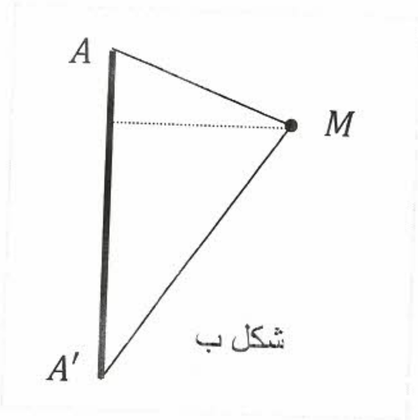
التمرين 6: نعتبر سلك مستقيم طوله $2L$ مشحون بكثافة خطية موجبة و منتظمة λ (الشكل أ)

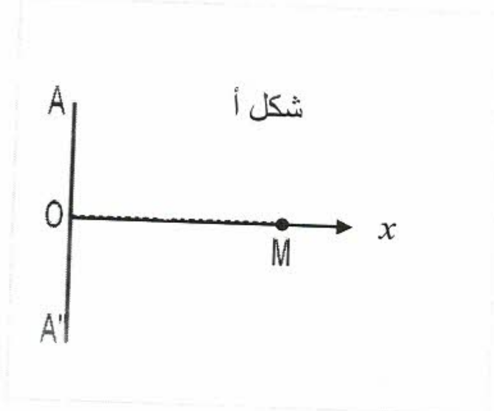
1- باستعمال خواص التناظر حدد اتجاه الحقل الكهرساكن في مستوي يحمل السلك.

2- أحسب الحقل والكمون الكهرساكنين عند نقطة M تقع على محور تناظر السلك وتبعد بمسافة x عنه. أستنتج الحقل الكهرساكن الناتج عن سلك لا منتهي .

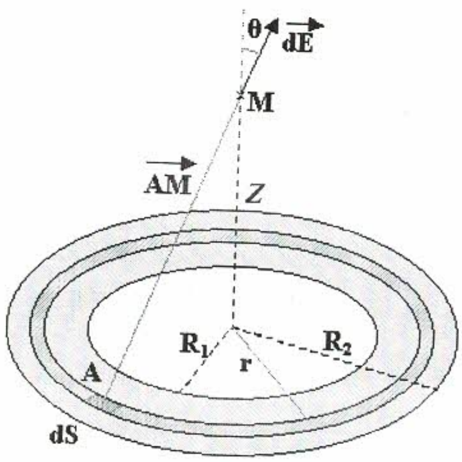
3- هل يمكن استنتاج الكمون الكهرساكن في حالة سلك لا منتهي من النتيجة السابقة ؟

4- أعد الحساب من أجل الشكل (ب). كيف نستنتج حسابات الشكل أ من حسابات الشكل ب.





التمرين 7: - أحسب الكمون الكهرساكن الناتج عن قرص أجوف مشحون بكثافة سطحية منتظمة وموجبة σ ، نصف قطره الداخلي R_1 و الخارجي R_2، عند النقطة M التي تقع فوق محوره و تبعد عن المركز O بالمسافة Z



- باستعمال تناظر الجملة حدد اتجاه الحقل
- أحسب قيمة الحقل الكهرساكن في M بدلالة المسافة Z
- أستنتج حالة المستوي اللامنتهي.
- هل يمكن استنتاج كمون المستوي الامنتهي من نتيجة القرص، برر الإجابة اعتمادا على خواص الكمون.

III- نظرية غوس:

التمرين 8: سطح مستوي لا منتهٍ مشحون كهربائياً بكثافة سطحية منتظمة $+\sigma$.

- حدد عناصر التناظر لهذه الجملة و بين سطح غوس المناسب.
- أحسب الحقل الكهرساكن الناتج في نقطة M تبعد عن المستوي بالارتفاع Z. أستنتج الكمون الكهرساكن في تلك النقطة.
- أرسم طوبوغرافيا الحقل و الكمون من أجل كل قيم Z موجبة ، و Z سالبة.
- نضيف سطحاً ثان على بعد d من الأول، له توزيع منتظم $-\sigma$: أحسب قيمة الحقل المحصل في مختلف المجالات. أحسب فرق الكمون بين السطحين، بدلالة الكثافة σ، ثم استخرج السعة الكهربائية للجملة .

التمرين 9 : كرة مجوفة مركزها O، و نصف قطرها الداخلي R_1 والخارجي R_2، مشحونة بكثافة حجمية منتظمة وموجبة ρ.

- أحسب الحقل والكمون الكهرساكنين في كل مجال الفضاء ومثل تغيرهما بدلالة البعد r عن المركز O.

نضيف الى الكرة السابقة سطح كروي نصف قطره R_3 أكبر من R_2 لهما نفس المركز O ويحمل كثافة شحنية سطحية σ منتظمة.

- أحسب الحقل و الكمون الناتجين في كل مجالات r. ثم أرسم تغيرهما بدلالة r.

تمارين إضافية:

التمرين 10: عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه a ، ثبتنا ثلاثة شحنات نقطية موجبة Q

و في مركز المثلث وضعت شحنة سالبة $-Q$ ، المسافة بين الشحنتين Q و $-Q$ هي r

- أكتب a بدلالة r

- أستخرج عبارة الطاقة الكامنة الكهرساكنة لمجموع الشحنات بدلالة المتغير r

- حدد اتجاه القوي التي تؤثر بها الشحنات الموجبة في الشحنة السالبة، استنتج إشارة الطاقة

- ماذا يحدث لو نزعنا التثبيت عن الشحنات الموجبة

التمرين 11: سلك مستقيم شاقولي ولامنتهي يحمل شحنة كهربائية موزعة بانتظام بكثافة خطية $+\lambda$.

- ناقش عناصر تناظر الجملة ، ثم استنتج طبيعة تناظرها ، ثم حدد سطح غوس المناسب.

- أحسب قيمة الحقل الكهرساكن $\vec{E}(M)$ الناتج عن هذا التوزيع عند نقطة M تبعد مسافة عمودية r عن السلك. استنتج قيمة الكمون الكهرساكن.

نضيف سلكاً ثان مواز للأول على بعد d، و يملك نفس التوزيع :

- أستنتج الحقل الكهرساكن المحصل في نقطة كيفية من مستوي السلكين ، متى ينعدم الحقل. أوجد بنفس الطريقة الكمون الكهرساكن المحصل.

التمرين 12: أعطت قياسات دقيقة لحقل كهربائي العبارة التالية:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{a}{r^2}\left(1-\dfrac{r^3}{R^3}\right)\overrightarrow{Ur}, & r \le R \\ \vec{0}, \quad r \ge R \end{cases}$$

حيث a و R ثابتان. ما هو من بين التوزيعات الآتية التوزيع الذي انتج هذا الحقل؟

1- شحنة نقطية سالبة قيمتها $q = -4\pi\epsilon_0\, a$ موضوعة عند المبدأ O و كرة فارغة نصف قطرها R ومشحونة بكثافة شحنية منتظمة موجبة $\sigma = q/4\pi R^2$

2- شحنة نقطة موجبة قيمتها $q = 4\epsilon_0 a$ موضوعة عند المبدأ O وكرة فارغة نصف قطرها R ومشحونة بكثافة شحنة سطحية منتظمة سالبة $\sigma = -q/4\pi R^2$

3- شحنة نقطة موجبة قيمتها $q = 4\pi\epsilon_0 a$ موضوعة عند المبدأ O وكرة نصف قطرها R ومشحونة بكثافة شحنة حجمية منتظمة سالبة قيمتها $\rho = -q/(\frac{4\pi R^3}{3})$

4- شحنة نقطة سالبة قيمتها $q = -4\epsilon_0 a$ موضوعة عند المبدأ O وكرة نصف قطرها R ومشحونة بكثافة شحنة منتظمة موجبة قيمتها $\rho = -q/(\frac{4\pi R^3}{3})$

5- لا يمكن إيجاد هذا الحقل من الحالات السابقة.

__التمرين 11:__ في حالة أسطوانة لا منتهية نصف قطرها $\boldsymbol{R}$ و محورها $\boldsymbol{Oz}$، يمكن أن نحدد موقع النقطة $\boldsymbol{M}$ بدلالة إحداثياتها الأسطوانية (r, θ, z) . نعتبر السطح الجانبي للأسطوانة سطحا متساوي الكمون $\boldsymbol{V_0}$.

أحسب الحقل و الكمون الكهروساكن في كل نقاط الفضاء ، و حدد شكل خطوط الحقل و سطوح تساوي الكمون في الحالتين التاليتين :

1- الأسطوانة مشحونة سطحيا بكثافة $\boldsymbol{\sigma}$=Cte.

2- الأسطوانة مشحونة حجميا بكثافة من الشكل $\rho(r) = \rho_0 \frac{R}{r}$ من أجل $r < R$ و معدومة خارجه

تمارين مختارة من الامتحانات السابقة

<u>التمرين 1 (امتحان قصير)</u>: في الشكلين (ا) و (ب) لدينا أربع شحن كهربائية ثابتة فوق رؤوس مربع طول ضلعه $2a$ مع $q > 0$. في الحالتين:

1- أحسب الحقل والكمون الكهربائيين في مركز المربع O.

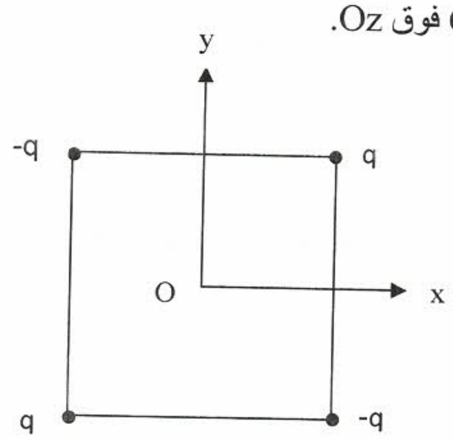
2- أحسب الحقل والكمون الكهربائيين في نقطة M من المحور Oz تقع على ارتفاع z من مركز المربع.

3- نضع شحنة Q قابلة للحركة في المبدأ O.

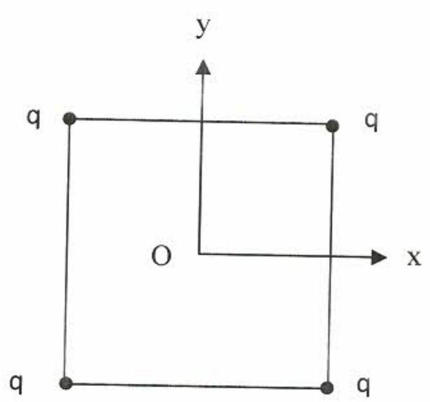
أ- ما هي الطاقة الكهربائية الكامنة للشحنة Q.

ب- ما هو العمل اللازم لنقل Q فوق المحور Oz من المبدأ إلى $+\infty$.

ت- أدرس إمكانية حركة Q فوق المحور Oz لما $Q > 0$ ولما $Q < 0$ واستنتج طبيعة توازن Q فوق Oz.



شكل (ا)



شكل (ب)

مراقبة قصيرة في مقياس الفيزياء 2

<u>التمرين الأول (10 نقاط)</u>: شحنتان نقطيتان موجبتان ومتساويتان قيمة كل منهما q مثبتتان على المحور Oy عند $y = +a$ و $y = -a$ في المستوي الديكارتي (Oxy).

1- حدد قيمتي الحقل والكمون الكهربائيين في المبدأ O.

2- احسب عبارتي الحقل والكمون الكهربائيين في نقطة M من المحور Ox توجد عند الفاصلة x.

3- مثل منحنى الكمون على المحور Ox بدلالة x.

4- نضع في M(x) شحنة موجبة q' قابلة للحركة كتلتها m. ما هي طاقتها الكهربائية الكامنة. ما هي القوة الكهربائية التي تؤثر عليها.

5- عندما تكون قوة الثقل للشحنة 'q مهملة أمام القوة الكهربائية، ما هي السرعة الابتدائية التي تأخذها انطلاقا من $M(x)$ لكي تصل الى O.

6- صف حركة 'q على Ox لما ت كون سرعتها الابتدائية أقل أو أكبر من السرعة المحسوبة في السؤال السابق.

التمرين الثاني (10 نقط): رأينا في حالة سلك AB طوله 2a يحمل كثافة شحنية خطية λ موجبة أن الحقل الكهربائي الناتج عنه في نقطة M توجد على محوره Ox على مسافة x من O هو:

$$\overrightarrow{E(M)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{sin\alpha_0}{x}\vec{\imath}$$

حيث α_0 هي الزاوية التي يشكلها Ox مع القطعة AM عندما نسمي A أحد طرفي السلك (الشكل1).

نعتبر سلك مربع الشكل طول ضلعه 2a ويحمل نفس الكثافة الشحنية السابقة λ. نختار المعلم الديكارتي (Oxyz) بحيث O هو مركز المربع و Ox و Oy محوري المربع و Oz عمودي على مستوي المربع.

1- ما هي احداثيات رؤوس المربع في المعلم (Oxyz) وارسم شكلا يبين ذلك.

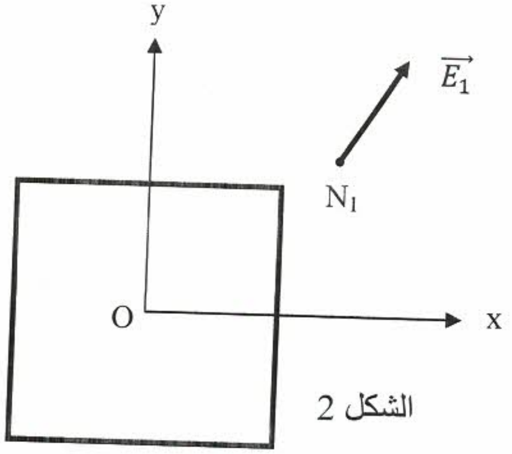
2- ما هي قيمة شعاع الحقل الكهربائي في O.

3- ما هي عبارة شعاع الحقل الكهربائي في نقطة $M(0,0,z)$ تنتمي إلى Oz ومثله على الشكل.

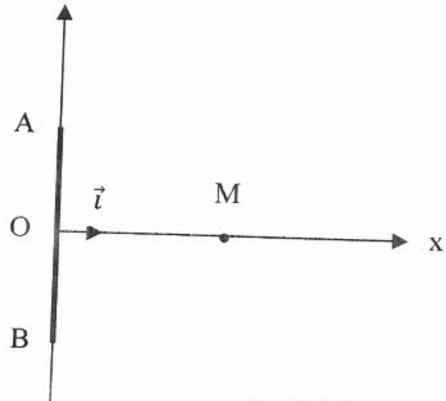
4- ما هي عبارة شعاع الحقل في نقطة 'M مناظرة للنقطة M بالنسبة للمبدأ O ومثله على الشكل.

5- أرسم جميع خطوط الحقل الكهربائي الممثلة بخطوط مستقيمة مع تحديد اتجاهها.

6- نعتبر النقاط $N_1(x,y,0)$ و $N_2(-x,y,0)$ و $N_3(-x,-y,0)$ و $N_4(x,-y,0)$. إذا كان الشعاع $\overrightarrow{E_1}$ يمثل الحقل الكهربائي في N_1 (الشكل 2)، مثل شعاع الحقل الكهربائي في النقاط الثلاثة المتبقية.



الشكل 2



الشكل 1

التمرين 2 (امتحان قصير): سلك نصف دائري مركزه O ونصف قطره R يحمل كثافة شحنية خطية منتظمة موجبة λ .

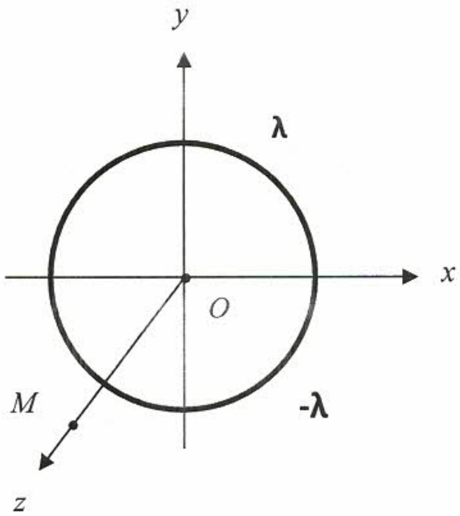
1- احسب شعاع الحقل والكمون في O.

نكمل السلك السابق بنصف دائرة لها نفس المركز ونصف القطر ولكن تحمل كثافة شحنية خطية منتظمة سالبة $-\lambda$.

2- اوجد شعاع الحقل والكمون الجديدين في O .

3- حدد اتجاه شعاع الحقل على المحاور Ox و Oy .

4- في نقطة M توجد على المحور Oz العمودي على مستوي الدائرة وعلى ارتفاع z من O الحقل $\vec{E}(M)$ هو:



- $\vec{E}(M) = \frac{-\lambda R^2}{\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$
- $\vec{E}(M) = \frac{-\lambda R^2}{\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{j}$
- $\vec{E}(M) = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$

ما هو الجواب الصحيح ؟ لماذا؟

التمرين 3 (امتحان): نعتبر توزيعا شحنيا يملك تناظرا كرويا مركزه O بحيث الكمون الكهربائي $V(M)$ الناتج عن هذا التوزيع في نقطة M تبعد بمسافة r عن المركز O يكتب من الشكل :

$V(M) = \left(\frac{A}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ حيث A و a ثابتان موجبان.

1- ما هي أبعاد (وحدة) A و a .

2- أحسب الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ الموافق .

3- انطلاقا من عبارة الحقل الكهربائي على سطح كرة مركزها O ونصف قطرها r، أحسب الشحنة $Q(r)$ داخل هذه الكرة. استنتج الشحنة الكلية لهذا التوزيع $(r\rightarrow\infty)$.

4- احسب الكثافة الشحنية الحجمية ρ عند المسافة r من O مع تحديد إشارتها .

5- بين أنه توجد في المركز O شحنة موجبة تحدد قيمتها. ما هي اذن عبارة الحقل الكهربائي بجوار النقطة O ؟

6- ما هو التوزيع الشحني المقترح في التمرين.